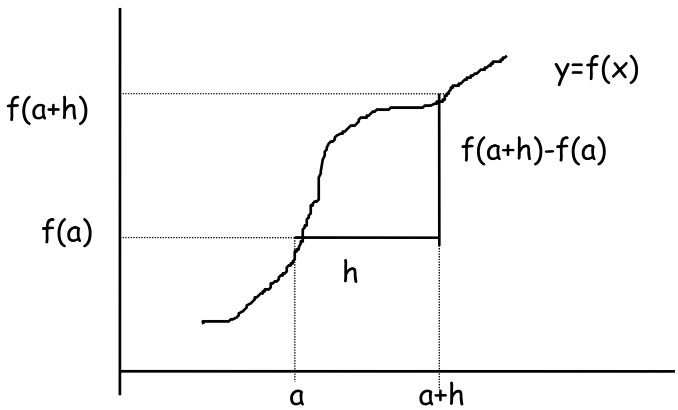
TEMA 9: DERIVADAS

9.1 CONCEPTO DE DERIVADA. FUNCIÓN DERIVADA.

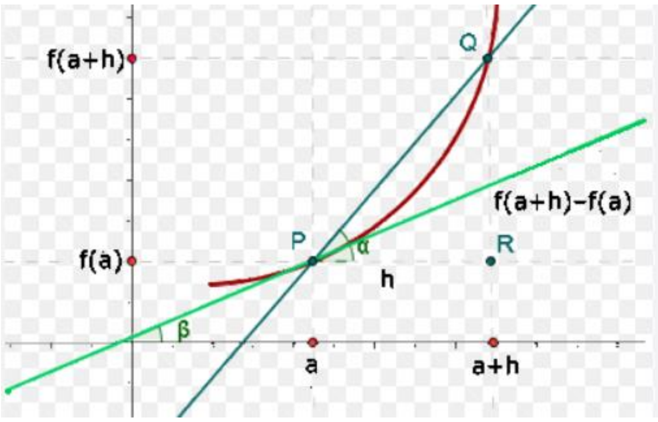
En muchas ocasiones es importante no sólo estudiar lo que ocurre en un punto sino estudiar el cambio que experimenta una variable respecto de la otra. Si queremos saber la velocidad media desde que sale de Fuengirola hasta que llega a Málaga, debemos utilizar $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, llamada **tasa de variación media** (T.V.M.). Pero si queremos averiguar a qué velocidad va en un momento determinado, tendremos que averiguar qué ocurre el cociente cuando b – a se acerca a 0, es decir, $\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, llamada **tasa de variación instantánea**.

Este concepto matemático no sólo nos prestará una ayuda primordial en la representación de funciones ya que con el cálculo de derivadas sabremos donde la función es creciente/decreciente y localizaremos los extremos relativos (máximos y mínimos).



Definamos ya el concepto de derivada: Dada una función y = f(x) se define la **derivada** de f en un punto x=a como el siguiente límite $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Si dicho límite existe se dice que f es **derivable** en x=a.

Interpretación geométrica:



Las secantes que pasan por (a,f(a)) y (a+h, f(a+h) se acercan a la recta tangente a f en x=a cuando h tiende a 0. Por tanto, la pendiente de la recta tangente es el límite de las pendientes de las rectas secantes. Es decir:

<u>La pendiente de la recta tangente a f en x=a es la derivada de f en x=a</u>.

Podemos calcular la ecuación de la recta tangente a f en x = a porque conocemos el punto por donde pasa (a, f(a)) y su pendiente es f´(a). Y quedaría de la forma

$$y = f'(a)\,(x - a) + f(a)$$

A partir de la recta tangente podemos definir la **recta normal a f en x=a** como la recta perpendicular a la recta tangente en el punto (a,f(a)), por tanto pasa por el punto (a, f(a)) y su pendiente es $\frac{-1}{f'(a)}$. Y su ecuación es de la forma

$$y = \frac{-1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$$

Ejercicio 1: Calcula, por definición, la derivada de $f(x) = -2x$ en $x = 3$.

Ejercicio 2: Calcula, por definición, la derivada de $f(x) = \frac{3}{x+1}$ en $x = 2$.

Si tenemos límites laterales, tenemos las derivadas laterales que se denotan por $f'(a^+)$ y $f'(a^-)$. Veamos con un ejemplo como hacerlo.

Ejercicio 3: Sea $f(x) = |x|$, calcula $f'(0)$.

Ejercicio 4: Sea $f(x) = x^2 - 1$, calcula $f'(0)$.

Ejercicio 5: Calcula la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $f(x)=x^2+1$ en el punto de abscisa x=1.

Ejercicio 6: Calcula la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ en el punto de abscisa x=1.

Observaciones:

1) **Si una función f es derivable en un punto x=a entonces f es continua en x= a.**
2) Si la derivada es positiva la función es creciente.
3) Si la derivada es negativa la función es decreciente (ejercicio 1)
4) La derivada puede no existir, ya que hay límites que no existen (insistir que si un límite vale infinito nos indica que no hay derivada) (ejercicio 3)
5) Si una función tiene un máximo o un mínimo en un punto derivable, entonces su derivada vale 0. (ejercicio 4)
6) La continuidad era poder dibujar la gráfica sin levantar el lápiz del papel, la derivabilidad es la suavidad de la curva, observa la función valor absoluto.

Queremos calcular la derivada de una función, no sólo en un punto concreto, sino en cualquier x, como consecuencia tenemos la siguiente definición: La **función derivada** de una función f es la que asocia a cada x su derivada, f´(x).

$$\begin{aligned} f': \mathrm{Dom} f &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \end{aligned}$$

El dominio de f´está contenido en el dominio de f.

Ejercicio 7: Dada la función $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Calcular su función derivada.

Ejercicio 8: Dada la función $g(x) = 12x + 5$. Calcular su derivada.

Ejercicio 9: Dada la función $h(x) = x^2 + 1$. Calcular su derivada.

Es evidente que si complicamos la función f el cálculo de la derivada se complica mucho por ello es necesario buscar una forma más cómoda de realizar dichos cálculos. ¿Observas alguna reglilla que nos facilite el cálculo de derivadas?

9.2 REGLAS DE DERIVACIÓN.

Vamos a demostrar algunas de las reglas de derivación y después haremos un resumen de todas las que necesitamos:

a) Derivada de una constante. y = k

Si f(x)=K entonces su función derivada será:

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=0$, es decir, (k)´=0.

b) Derivada de una cte. por una función. y = k f(x)

$$(kf)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(kf)(x+h)-(kf)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{k[f(x+h)-f(x)]}{h} = kf'(x).$$

$$(kf)'(x)=kf'(x)$$

c) Derivada de la suma: y = f(x) + g(x)

$$(f+g)' = \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x).$$

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$$

d) Derivada del producto de dos funciones: y = f(x) · g(x)

$$(f.g)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(f.g)(x+h)-(f.g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)-f(x).g(x)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x).g(x)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)[f(x+h)-f(x)]+f(x)[g(x+h)-g(x)]}{h} =\ldots= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
$$(f.g)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

e) Derivada del cociente de dos funciones:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} =$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x)[f(x+h)-f(x)]-f(x)[g(x+h)-g(x)]}{hg(x+h)g(x)} = \frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

REGLAS DE DERIVACIÓN				
	Función	Derivada	Función	Derivada
1	y = k	y´ = 0		
	y = x	y´ = 1	y = kx	y´ = k
3	$y=x^n$	$y' = n x^{n-1}$	$y = [f(x)]^n$	$y' = n\,[f(x)]^{n-1}.f'(x)$
	$y=\sqrt[n]{x}$	$y'=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{n\sqrt[n]{[f(x)]^{n-1}}}$
5	y = f(x) + g(x)	y´ = f´(x) + g´(x)	y = f(x) : g(x)	y´ = $\dfrac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g(x)^2}$
	y = k . f(x)	y´ = k . f´(x)	y = f(x) . g(x)	y´=f´(x).g(x) + f(x).g´(x)
7	y = f[g(x)]	y´ = f´[g(x)] . g´(x)	Regla de la cadena	
	y = f^{-1} (x)	y´ = $\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$	Derivada de la función inversa	
9	$y=a^x$	$y'= a^x \, Lna$	$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)}\, f'(x) Lna$
	$y=e^x$	$y'=e^x$	$y=e^{f(x)}$	$y'= e^{f(x)}\, f'(x)$
11	$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x}\log_a e$	$y=\log_a f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\log_a e$
	$y=Lnx$	$y'=\dfrac{1}{x}$	$y=Lnf(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
13	$y = senx$	$y' = \cos x$	$y = senf(x)$	$y' = \cos f(x)\, .\, f'(x)$
	$y = \cos x$	$y' = -senx$	$y = \cos f(x)$	$y' = -senf(x).\, f'(x)$
15	Y = tagx	y´= $\dfrac{1}{\cos^2 x}$	y = tagf(x)	y´= $\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
	y = cotagx	y´= $\dfrac{-1}{sen^2 x}$	y = cotagf(x)	y´= $\dfrac{-f'(x)}{sen^2 f(x)}$
17	Y = secx	y´= $\dfrac{senx}{\cos^2 x}$	y = secf(x)	Y´= $\dfrac{senf(x)}{\cos^2 f(x)}$. f´(x)
	y = cosecx	y´= $\dfrac{-\cos x}{sen^2 x}$	y = cosecf(x)	y´= $\dfrac{-\cos f(x)}{sen^2 f(x)}$. f´(x)
19	y = arcsenx	y´= $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	y = arcsenf(x)	y´= $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
	y = arccosx	y´= $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	y = arccosf(x)	y´= $\dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
21	y = arctagx	y´= $\dfrac{1}{1+x^2}$	y = arctagf(x)	y´= $\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$
	y = arccotagx	y´= $\dfrac{-1}{1+x^2}$	y = arccotagf(x)	y´= $\dfrac{-f'(x)}{1+f(x)^2}$

Ejercicio 10: Calcula las derivadas del archivo anexo.

Ejercicio 11: Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) f(x) = $\frac{x}{x^2 - 4}$

b) f(x) = $\begin{cases} x^2 + 4x + 1 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

c) f(x) = $\begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si} x \geq 1 \end{cases}$

d) f(x) = |x|

e) f(x) = |x - 1| + x

Ejercicio 12: Sea la función f(x) = $\begin{cases} 2x^2 - 3x + a & si\ x \leq 0 \\ x^2 + bx + 1 & si\ x > 0 \end{cases}$. Halla los valores de a y b para que sea continua y derivable en todo su dominio.

Ejercicio 13: Sea la función f(x) = $\begin{cases} -x^2 + ax - 7 & si\ x < 1 \\ 4x - b & si\ x \geq 1 \end{cases}$. Halla los valores de a y b para que f sea derivable en x = 1.

Ejercicio 14: Halla los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de f(x) = ax^2 + bx en x = 1 sea paralela a la recta y = 4x y f pase por el punto (1, -2).

9.3 APLICACIONES DE LAS DERIVADAS.

Recuerda que al definir la derivada vimos la relación con la recta tangente. En puntos donde la función es derivable y la función tiene un máximo o un mínimo podemos ver que la recta tangente en dicho máximo o mínimo es horizontal, por tanto, la derivada vale 0. ¿Qué ocurre cuando la función crece? Observa que cuando la función crece las rectas tangentes tienen pendiente positiva y cuando la función decrece las rectas tangentes tienen pendiente negativa. En conclusión:

1) Si f´(x) > 0 en (a, b) entonces f es estrictamente creciente en (a, b).
2) Si f´(x) < 0 en (a, b) entonces f es estrictamente decreciente en (a, b).
3) Si f´(a) = 0 entonces f puede tener un máximo o un mínimo en x = a.

Ejercicio 15: Estudia la monotonía (crece y decrece) y los extremos (máximos y mínimos) de las siguientes funciones:

a) f(x) = e^x

b) f(x) = x^2 - 2x

c) f(x) = $\frac{1}{x}$

d) f(x) = $\frac{2x}{x-1}$

e) f(x) = $\frac{x^2}{x-1}$

f) f(x) = x^3 – x

g) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x & si\ x < 0 \\ \frac{x}{x+1} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

h) $f(x) = x^2 - |x| - 2$

i) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

j) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & si\ x \leq 0 \\ \frac{1}{1-x} & si\ x > 0 \end{cases}$

k) $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & si\ x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 8 & si\ 2 < x < 4 \\ \frac{x-3}{x} & si\ x \geq 4 \end{cases}$

Ejercicio 16: Calcula las derivadas sucesivas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2 - 2x$
b) $f(x) = x^4 - 2x^3$
c) $f(x) = x^5 - x$
d) $f(x) = e^x$
e) $f(x) = \frac{1}{x}$
f) $f(x) = sen(x)$

Ejercicio 17: Halla los valores de a, b y c sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x + c}$ tiene una asíntota vertical en x = 1, una asíntota oblicua de pendiente 2 y un extremo de abscisa x = 3.

Ejercicio 18: La evolución de la fiebre de un enfermo ingresado está en función del tiempo y sigue la siguiente función $f(t) = -t^2 + 4t + 38$, donde t viene dado en horas y f(t) la temperatura en grados.

a) ¿Qué temperatura tiene al inicio de su ingreso? ¿y después de una hora? ¿y a las dos horas?
b) ¿Cuándo alcanza la temperatura máxima?

Ejercicio 19: En una fábrica, la producción de unidades de un determinado artículo a lo largo del día viene dada por la función u(t) = 20t (48 – t), donde t representa el tiempo en horas.

a) Calcula el número de unidades al finalizar la primera hora y al terminar el día (suponemos que la fábrica trabaja las 24 horas)
b) Calcula la hora de mayor fabricación. ¿Cuántas unidades fabrica?

Ejercicio 20 resuelto: La suma de dos números no negativos es 14. Calcúlalos para que su producto sea el mayor posible.

1) Llamo x e y a cada uno de los números buscados. Queremos que el producto sea máximo, por tanto defino $P(x, y) = x \cdot y$
2) ¿Qué relación hay entre x e y. La suma de dos números es 14 → x + y = 14
3) y = 14 – x (a veces es más fácil despejar una, es fácil de vez, en este caso nos da igual) y sustituimos en $P(x, y) = x \cdot y \rightarrow P(x) = x \cdot (14 - x) = 14x - x^2$

4) dos números no negativos → $x \geq 0$, en este caso no se trata de un intervalo.
5) $P'(x) = 14 - 2x$
6) $[0, 7)$ crece $\quad (7, +\infty]$ decrece
7) En este caso (al ser una parábola) el mínimo está en el vértice, $x = 7$.
8) No olvides expresar bien la solución, los números buscados son 7 y 7.

Ejercicio 21: Una cadena de montaje está especializada en la producción de un modelo de motocicleta. Los costes de producción en euros, $C(x)$, se relacionan con el número de motocicletas fabricadas, x, mediante la expresión:

$$C(x) = 10x^2 + 2000x + 250000$$

Si el precio de venta de cada motocicleta es de 8000 € y se venden todas las fabricadas, se pide:

a) Define la función de ingresos que obtiene la cadena de montaje en función de las unidades vendidas.
b) ¿Qué función expresa los beneficios de la cadena?
c) ¿Cuántas motocicletas debe fabricar para maximizar beneficios? ¿A cuánto ascenderán los mismos?

Ejercicio 22: Estudia el dominio, puntos de corte, simetría, monotonía y asíntotas de las siguientes funciones (para profundizar):

a) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 - 4}$ $\qquad$ b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ $\qquad$ c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

9.4 INTEGRALES DE FUNCIONES ELEMENTALES (TRABAJO DEL TERCER TRIMESTRE).

¿Qué es integrar? La integral busca la expresión de una función conociendo la expresión de su derivada. Por ejemplo, si $f'(x) = e^x$, ¿sabes quién es $f(x)$? $f(x) = e^x$, pero también nos sirve $f(x) = e^x + 1$, y $f(x) = e^x - 2$, por tanto, decimos que la integral de $f'(x)$ es $f(x) = e^x + C$. Se denota $\int e^x dx = e^x + C$

FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN:

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x} dx = \mathrm{Ln}|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \mathrm{sen}x\, dx = -\cos x + C \qquad \int \mathrm{cox}\, dx = \mathrm{sen}\, x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg}x + C \qquad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg}x + C$$

** Sigue investigando y entrega los siguientes ejercicios.

Ejercicio 23: Calcula las siguientes integrales:

1) $\int 2x dx$	2) $\int 3x^2 dx$	3) $\int 4x^3 dx$
4) $\int 10x^4 dx$	5) $\int 4x dx$	6) $\int 18x^8 dx$
7) $\int 2x^4 dx$	8) $\int x^5 dx$	9) $\int 3x^5 dx$
10) $\int 2 dx$	11) $\int (x^2 - 3x + 5) dx$	12) $\int (-x^3 + 3x - 1) dx$
13) $\int \frac{1}{x^2} dx$	14) $\int \frac{3}{x^3} dx$	15) $\int \frac{1}{(x-3)^2} dx$
16) $\int senx dx$	17) $\int \cos(3x+2) dx$	18) $\int [senx + \cos(3x+2)] dx$
19) $\int sen(2x+1) dx$	20) $\int 2xsenx\ ^2 dx$	21) $\int (3\cos x - 2) dx$
22) $\int \frac{1}{x} dx$	23) $\int \frac{3}{x-2} dx$	24) $\int tagx dx$
25) $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$	26) $\int \frac{\cos x}{2senx + 5} dx$	27) $\int \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x + 7} dx$
28) $\int \frac{\cos x}{1 + sen^2 x} dx$	29) $\int \frac{2}{1 + x^2} dx$	30) $\int \frac{x}{1 + x^4} dx$
31) $\int \cos x . e^{senx} dx$	32) $\int e^{2x+1} dx$	33) $\int x^2 e^{x^3} dx$