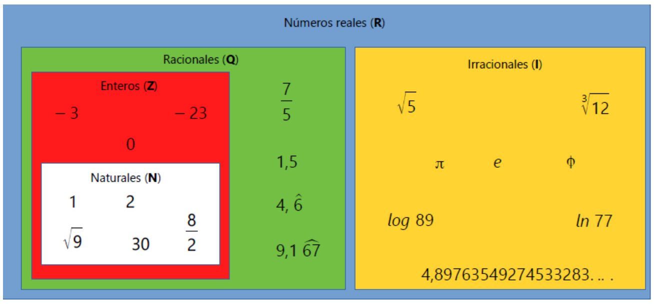
Números complejos

1-. ¿Qué son los números complejos?



¿Recuerdas cúando vimos los conjuntos numéricos? Usando los números reales podemos resolver muchas ecuaciones pero otras como

$x^2+4=0$

no tenían solución (al aparecer raíces de índice par con el radicando negativo).

Por suerte podemos ampliar nuestros números, añadiendo un grupo más: los números imaginarios. Estos números imaginarios se forman a partir de $\sqrt{-1}$ **, a la que llamaremos i.** De esta forma podemos expresar cualquier raíz negativa como un número imaginario:

$\sqrt{-4}=\sqrt{4\cdot(-1)}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=2i$ → Las soluciones de la ecuación anterior serían +2i y -2i

$\sqrt{-25}=5i$

$-\sqrt{-16}=-4i$

$\sqrt{\frac{-9}{4}}=\frac{3}{2}i$

$\sqrt{-7}=\sqrt{7}i$

Estos números imaginarios, unidos a los números reales, nos dan los números complejos.

3 es un número real.
2i es un número imaginario.
3+2i es un número complejo.

Se llama **números complejo**, en forma binómica, a la expresión a + bi, a “a” se le llama parte real y a “b” se le llama parte imaginaria. Normalmente los números imaginarios se representan con la letra z.

$$z=a+bi$$

Si b = 0 el número complejo se reduce a un número real, si a = 0 se llama número imaginario puro, si a= 0 y b= 0 se llama número complejo cero.

Dos números complejos son **iguales** si los son las partes reales e imaginarias, respectivamente, es decir,
a + bi = c + di ⇔ a = c b = d

Dos números complejos son **conjugados** si tienen la misma parte real y opuestas sus partes imaginarias.
z = a + bi su conjugado es $\overline{z}$ = a – bi.

El conjugado de 3+2i es 3-2i

No confundas el conjugado de un número complejo con su opuesto. **El opuesto** de un número complejo es el mismo número pero con sus signos cambiados:

Si z=3+2i   su opuesto es -z= -3-2i

2-. Operaciones con números complejos.

Suma

Para sumar dos números complejos se suman por separado las partes reales y las partes imaginarias.

Ejemplo:

$$(3+5i)+(4-8i) = (3+4)+(5-8)i = 7-3i$$

Diferencia

Para restar dos números complejos se restan por separado las partes reales y las partes imaginarias.

Ejemplo:

$$(3+5i)-(4-8i) = (3-4)+(5+8)i = -1+13i$$

Producto

Se aplica la propiedad distributiva y se debe tener en cuenta $i^2 = -1$

Ejemplo:

$$(3+5i)\cdot(4-8i) = 12-24i+20i+40 = 52-4i$$ *** 5i · (-8i) = -40 ·(-1) = +40 ***

Cociente

Para dividir dos números complejos multiplicamos la fracción por el **conjugado** del denominador.

Ejemplo:

$$(20+30i):(3+i) = \frac{20+30i}{3+i} = \frac{(20+30i)}{(3+i)}\cdot\frac{(3-i)}{(3-i)} = \frac{60-20i+90i+30}{9-3i+3i+1} = \frac{90-70i}{10} = \frac{90}{10}-\frac{70}{10}i = 9-7i$$

Fíjate en que lo que hacemos es multiplicar el primer número por el inverso del segundo:

$Si\ z=3+i$, podemos obtener su **inverso** de la siguiente forma:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{3+i} = \frac{1}{(3+i)} \cdot \frac{(3-i)}{(3-i)} = \frac{3-i}{10}$$

El **inverso** de un número z=a+bi es $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

Propiedades

Las propiedades (conmutativa, asociativa,...) que se demuestran en el conjunto de los números reales, también se demuestran en el conjunto de los números complejos.

Potencia de números complejos

La potencia de un números complejo se hace desarrollando la potencia del binomio (a + bi) y teniendo en cuenta las potencias del número i.

$i^0 = 1$ $i^1 = i$ $i^2 = -1$ $i^3 = -i$ $i^4 = 1$ $i^5 = i$ $i^6 = -1$

$i^7 = -i$ $i^8 = 1$, concluimos que $i^n = \begin{cases} 1 \quad si \ el \ resto \ de \ n:4 \ da \ 0 \\ i \quad si \ el \ resto \ de \ n:4 \ da \ 1 \\ -1 \quad si \ el \ resto \ de \ n:4 \ da \ 2 \\ -i \quad si \ el \ resto \ de \ n:4 \ da \ 3 \end{cases}$

Ejemplos: Calcula

a) i^{388} *b)* i^{-14}

a) 388 entre 4 da de resto 0. Eso significa que:

$$i^{388} = i^0 = 1$$

b) 14 entre 4 da de resto 2. Eso significa que:

$$i^{-14} = \frac{1}{i^{14}} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

Operaciones combinadas

Estas operaciones se pueden combinar igual que sucedía con los números reales:

Ejemplo:

$$(2+i)\cdot(3-2i)-\frac{i}{2+i} = (8-i)-(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i) = \frac{23}{3}-\frac{5}{3}i$$

Para facilitar la lectura he realizado la multiplicación y la división por separado

$$(2+i)\cdot(3-2i) = 6-4i+3i+2 = 8-i$$

$$\frac{i}{2+i} = \frac{i}{(2+i)}\cdot\frac{(2-i)}{(2-i)} = \frac{1+2i}{3} = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$$

Encontrar un complejo que cumpla...

En algunos ejercicios nos pedirán que calculemos alguna incógnita para que se de una condición:

Ejemplo: Calcula el valor de x para que (2+i)·(x-3i) sea un número real.

Lo primero que haremos será realizar la operación

$$(2+i)\cdot(x-3i) = 2x-6i+xi+3 = (2x+3)+(x-6)i$$

Como queremos que sea un número real, eso significa que su parte imaginaria tiene que ser 0. Entonces

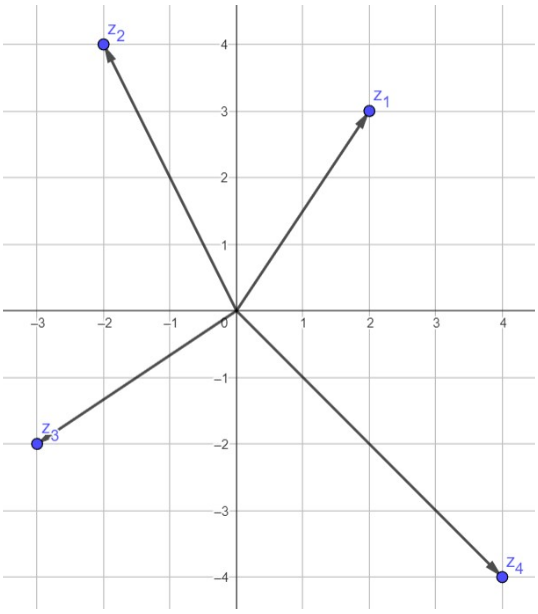
$$x-6=0$$
$$x=6$$

El valor de x tiene que ser 6. Entonces el número resultante es:

$$(2\cdot6+3)+(6-6)i = 9$$

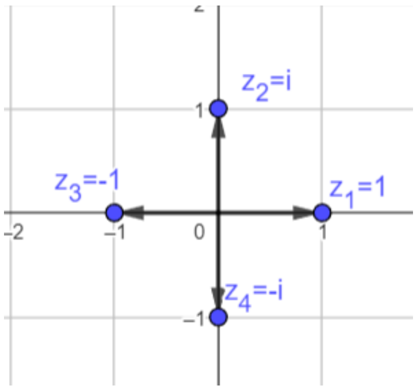
3-. Representación de números complejos

Para representar gráficamente un número complejo, dibujamos sobre el plano euclídeo un sistema de ejes cartesianos, en el eje de abscisas representamos la parte real (eje real) y en el eje de ordenada la parte imaginaria (eje imaginario), es decir al número complejo z = a + bi le corresponde las coordenadas (a,b) llamado **afijo**.

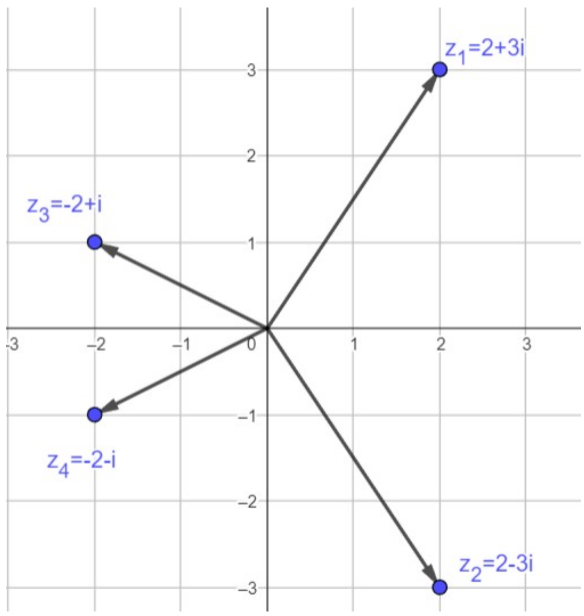


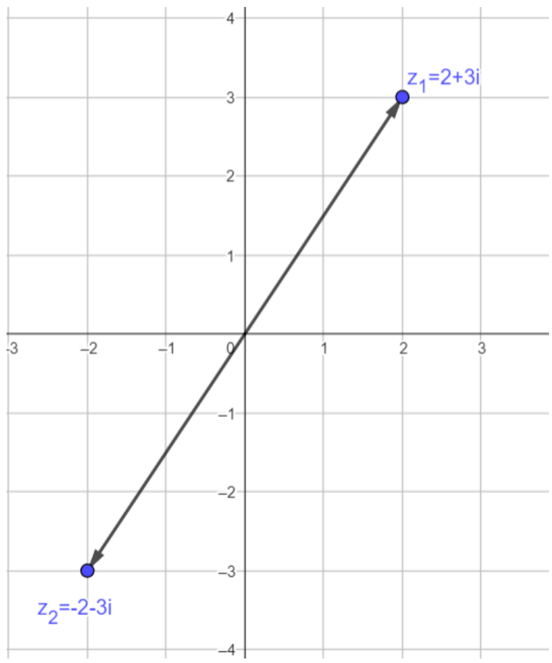
z_1 = 2+3i
z_2 = -2+4i
z_3 = -3-2i
z_4 = 4-4i

Si un número se encuentra sobre el **eje x es un número real** y si se encuentra sobre **el eje y es un número imaginario puro**.



El **afijo del conjugado** de un número complejo es el simétrico respecto al eje x.
El **afijo del opuesto** de un número complejo es el simétrico respecto al origen de coordenadas.





4-. Forma Polar $z=r_\alpha$

La forma polar de un número complejo está formada por el módulo y el argumento. El módulo indica la distancia con respecto al origen y el argumento el ángulo con respecto al eje x.

Dado un número complejo z se llama **módulo (r)** del número complejo z = a + bi al resultado de r = $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. (Es el módulo del vector (a,b) pero eso lo veremos en la próxima unidad). Indica la distancia del afijo al origen de coordenadas en línea recta.

Dado un número complejo z se llama **argumento (α)** del número complejo z = a + bi al ángulo que forma el semieje positivo de abscisas con la recta que contiene al vector (a,b) y se representa por

$arg(z)=\alpha$. Dicho argumento lo restringimos a la primera vuelta recibiendo el nombre de argumento principal, para decidir cuál es el ángulo adecuado debemos tener en cuenta el cuadrante del número complejo.

Para calcular el argumento utilizaremos la tangente:

$$tg\,\alpha=\frac{b}{a}$$

¿Por qué?

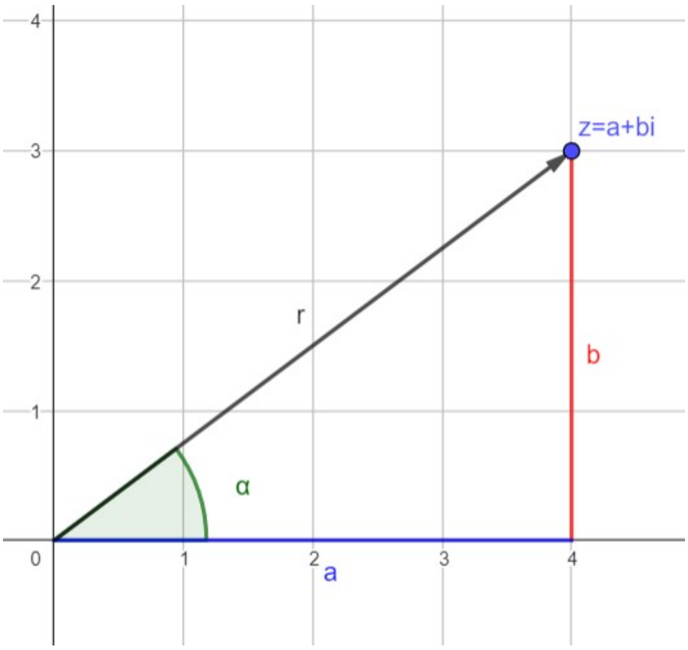
Si representamos el afijo de un número complejo podemos dar su posición mediante coordenadas polares (distancia al origen y ángulo que forma con el eje x).

Si dibujamos los segmentos a y b podemos aplicar el teorema de Pitágoras (por ser un triángulo rectángulo) para encontrar la longitud del segmento que une el afijo con el origen de coordenadas (el módulo).

$$r = |z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Y aplicando trigonométria podemos obtener que la tangente del ángulo (argumento) es:

$$tg\,\alpha=\frac{b}{a}$$



Usando el módulo y el argumento de un número complejo podemos escribirlo en su forma polar:

$$z=r_\alpha$$

Ejemplo: Escribe 1+i en forma polar

$$|z|=\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow \alpha=45^o (\text{porque estamos en el primer cuadrante })$$

$$z=\sqrt{2}_{45^o}$$

De forma polar a forma binómica.

Para pasar un número complejo de forma polar a forma binómica antes tenemos que pasar por la forma trigonométrica.

Usando el mismo dibujo de antes, ahora lo que conocemos es r y α y queremos obtener a y b. ¿Cómo lo podemos hacer? Aplicando trigonometría:

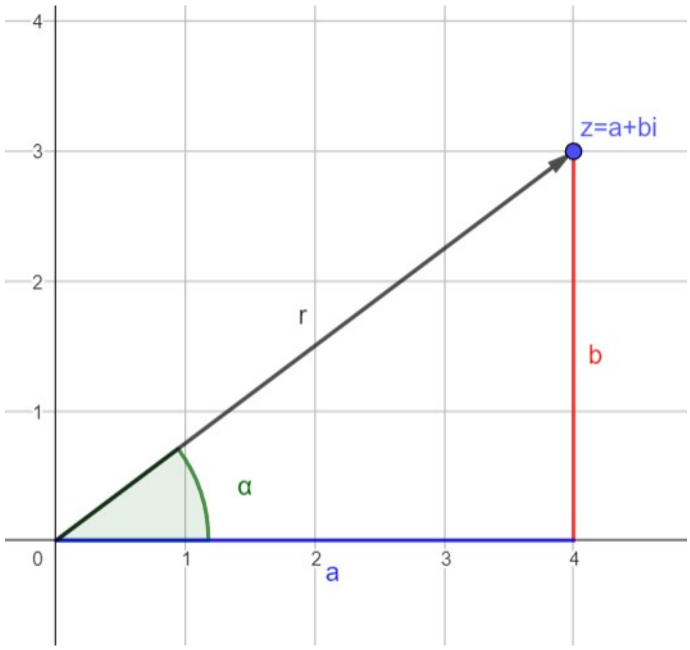
$a = r \cdot \cos\alpha$

$b = r \cdot sen\alpha$

Entonces:

$z = r_{\alpha} = r \cdot cos\,\alpha + r \cdot sen\,\alpha\, i = a + bi$

Es decir, de la forma polar pasamos a la forma trigonométrica y de la forma trigonométrica a la forma binómica.



Ejemplo: Pasa 3_{60° *a forma binómica:*

$$z = 3_{60^\circ} = 3 \cdot \cos 60^\circ + 3 \cdot sen\, 60^\circ i = 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} i = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i$$

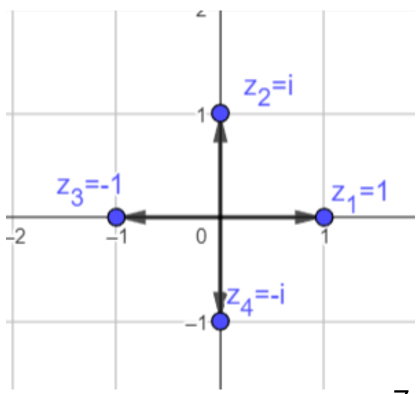
La utilidad de esta forma polar se encuentra en poder trabajar las potencias y el cálculo de raíces (y también facilita mucho la multiplicación y la división).

Si dos números complejos están en forma polar, para comprobar si son iguales debemos comprobar que sus módulos sean iguales y sus argumentos difieren en $2k\pi$ rad (o k·360º), siendo k un número entero.

Reales, imaginarios, conjugados y opuestos en forma polar

Si te fijas, un número **real positivo** tendrá de argumento 0º porque se encuentra sobre el eje x a la derecha del origen y un **número real negativo** tendrá de argumento 180º.

Un número i**maginario puro positivo** (sobre el eje y) tendrá de argumento 90º y uno **negativo** tendrá de argumento 270º.



En forma polar el **conjugado** de un número tiene el mismo módulo pero su argumento es -α (que se expresa como 360º- α)

Ejemplo:

Si $z=4_{50^\circ}$ *su conjugado sería* $\bar{z}=4_{-50}{}^{o}=4_{310^\circ}$ *(Se pone siempre en positivo)*

En forma polar el **opuesto** de un número tiene el mismo módulo pero su argumento es α+180º

Ejemplo:

Si $z=4_{50^\circ}$ *su opuesto sería* $-z=4_{230^\circ}$

5-. Operaciones con números complejos en forma polar.

En forma polar la multiplicación y división de números complejos se vuelve muy sencilla.

El **producto** de dos números complejos en forma polar es otro número complejo que tiene por módulo el producto de los módulos y por argumento la suma de los argumentos.

$$r_\alpha \cdot r'_{\alpha'} = (r \cdot r')_{\alpha+\alpha'}$$

Ejemplo:

$$3_{60^\circ} \cdot 5_{40^\circ} = 15_{100^\circ}$$

La **división** de dos números complejos en forma polar es otro número complejo que tiene por módulo el cociente de los módulos y por argumento la diferencia de los argumentos.

$$r_\alpha : r'_\beta = \frac{r}{r'}_{\alpha-\beta} \quad si \;\; r' \neq 0$$

Ejemplo:

$$3_{60^\circ} : 5_{40^\circ} = \frac{3_{60^\circ}}{5_{40^\circ}} = \left(\frac{3}{5}\right)_{20^\circ}$$

En forma polar el **inverso** de un número tiene como módulo el inverso de su módulo y su argumento es -α (que se expresa como 360º- α). De esta forma el resultado es 1_{0° que se corresponde con el número real 1.

Ejemplo: Calcula el inverso de $z=4_{50^o}$

Si $z=4_{50^o}$ *su inverso sería* $z^{-1}=\frac{1}{z}=\left(\frac{1}{4}\right)_{310^o}$

De esta forma si los mutiplicamos

$$z\cdot z^{-1}=z\cdot\frac{1}{z}=4_{50^o}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)_{310^o}=1_{360^o}=1_{0^o}=1$$

Potencias

La potencia n-ésima de un número complejo en forma polar es otro número complejo que tiene por módulo la potencia n-ésima del módulo y por argumento n veces el argumento del complejo dado. (Elevamos el argumento al exponente de la potencia y multiplicamos el argumento por el valor de la potencia)

$$(r_\alpha)^n=(r^n)_{\alpha\cdot n}$$

Ejemplo:

$$(4_{50^o})^3=4^3{}_{50^o\cdot 3}=64_{150^o}$$

Las raíces n-ésimas de un número complejo en forma polar son n números complejos que tienen por módulo la raíz n-ésima del módulo y por argumento $\beta=\frac{\alpha+2k\pi}{n}$ o $\beta=\frac{\alpha+k\cdot 360^o}{n}$

Siendo k = 0, 1, 2, ..., n-1

$$\sqrt[n]{r_\alpha}=\left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha+k\cdot 360^o}{n}}$$

Para calcular raíces, calculamos la raíz del módulo pero el argumento varía (una raíz tiene tantas soluciones como indica su índice).

Ejemplo: Calcula las raíces cúbicas de 27i

Escribimos 27i en forma polar: 27_{90^o}

Calculamos el módulo de las raíces:

$$\sqrt[3]{27}=3$$

Ahora calculamos los argumentos para k=0, 1 y 2
En este caso, como n=3, tenemos 3 argumentos:

$$\beta = \frac{\alpha + k \cdot 360^o}{n} \rightarrow \beta = \frac{90^o + k \cdot 360^o}{3}$$

Para k=0 $\beta = \dfrac{90 + 0 \cdot 360^o}{3} = 30^o$

Para k=1 $\beta = \dfrac{90 + 1 \cdot 360^o}{3} = 150^o$

Para k=2 $\beta = \dfrac{90 + 2 \cdot 360^o}{3} = 270^o$

Las raíces de cúbicas de 27i son $3_{30^o}, 3_{150^o}\ y\ 3_{270^o}$

¿Por qué tenemos que hacer esto con los argumentos? Porque si ahora elevas esos números complejos a 3, al multiplicar los ángulos nos saldrán 90º, 450º (que son 90º) y 810º (que también son 90º).

Ejemplo: Calcula las raíces cuadradas de 4 (Ya sabemos que tiene que salir 2 y -2. Vamos a comprobarlo).

Escribimos 4 en foma polar: 4_{0^o}

Calculamos la raíz cuadrada del módulo:

$$\sqrt{4} = 2$$

Ahora calculamos los argumentos para k=0 y 1
En este caso, como n=2, tenemos 2 argumentos:

$$\beta = \frac{\alpha + k \cdot 360^o}{n} \rightarrow \beta = \frac{0^o + k \cdot 360^o}{2}$$

Para k=0 $\beta = \dfrac{0 + 0 \cdot 360^o}{2} = 0^o$

Para k=1 $\beta = \dfrac{0^o + 1 \cdot 360^o}{2} = 180^o$

Las raíces de cuadradas de 4 son $2_{0^o}\ y\ 2_{180^o}$ *que se corresponden con 2 y -2 como ya sabíamos.*

Importante: Si representas todos los afijos que se obtienen de realizar una raíz n-ésima, obtendremos los vértices de un polígono regular de n lados. (Si representas los 3 afijos del primer ejemplo anterior obtendrás un triángulo equilátero).

6-. Resolución de ecuaciones dentro de los números complejos.

Gauss en 1799 demuestra el teorema fundamental del álgebra, que afirma que una ecuación de grado "n" tiene "n" soluciones(o raíces). En este apartado vamos a resolver ecuaciones de la misma forma que hasta ahora la diferencia está en la resolución final al resolver la raíz de un número negativo. Trabajaremos con la letra **z** que nos recuerda que estamos trabajando con números complejos.

Si los coeficientes de una ecuación son todos números reales, cuando un número complejo es solución de esa ecuación, también lo es su conjugado.

Ejemplo: Resuelve $x^2+4=0$

Resolvemos la ecuación normal

$$x^2+4=0$$
$$x^2=-4$$

Y cuando realizamos la raíz cuadrada utilizamos los complejos para trabajar con las raíces negativas.

$$x=\sqrt{-4}=\pm 2i$$

Ejemplo: Resuelve: $z^3-8=0$

Cuando queremos obtener todas las soluciones (reales y complejas) se suele indicar utilizando como incógnita la letra z en lugar de x, para indicar que estamos trabajando con complejos.

$$z^3-8=0$$

$$z^3=8$$

$$z=\sqrt[3]{8}$$

Para resolver esto pasamos 8 a su forma polar: $8_{0°}$

La raíz cúbica de su módulo es:

$$\sqrt[3]{8}=2$$

Ahora calculamos los argumentos para k=0, 1 y 2

En este caso, como n=3, tenemos 3 argumentos:

$$\beta=\frac{\alpha+k\cdot 360^o}{n} \rightarrow \beta=\frac{0^o+k\cdot 360^o}{3}$$

Para k=0 $\beta=\frac{0^o+0\cdot 360^o}{3} = 0^o$

Para k=1 $\beta=\frac{0^o+1\cdot 360^o}{3} = 120^o$

Para k=2 $\beta=\frac{0^o+2\cdot 360^o}{3} = 240^o$

Las raíces de cúbicas de 8 son $2_{0^o}, 2_{120^o}\, y\, 2_{240^o}$

Si los pasamos a forma binómica:

$2_{0^o} = 2$

$2_{120^o} = -1+\sqrt{3}i$

$2_{240^o} = -1-\sqrt{3}i$

Ejemplo: Crea una ecuación de segundo grado con coeficientes reales con solución 1+1i

Si la ecuación tiene todos sus coeficientes reales significa que también es solución su conjugado 1-1i

Entonces la ecuación sería

$(x-(1+1i))\cdot(x-(1-1i))=0$ → *Hay que multiplicar con paciencia...*

$x^2-x+xi-x-xi-(1-1i+1i+1)=0$

$x^2-2x-2=0$

Si intentas resolver la ecuación de segundo grado obtendrás las dos soluciones que hemos utilizado.

Ejemplo: Resuelve la siguiente ecuación: $z^2+2iz+1=0$

Aunque tenga números complejos, la resolvemos como una ecuación de segundo grado.

$$z=\frac{-2i\pm\sqrt{-4-4}}{2}=\frac{-2i\pm\sqrt{-8}}{2}=\frac{-2i\pm\sqrt{8}i}{2}=\frac{-2i\pm2\sqrt{2}i}{2}=-i\pm\sqrt{2}i=\left(-1\pm\sqrt{2}\right)i$$

El resultado son dos números imaginarios puros. (Hemos sacado i como factor común)