TEMA 4: APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

4.1 OPTIMIZACIÓN.

Una de las aplicaciones más "reales" de la derivada es la resolución de problemas de optimización donde vamos a conseguir máximos o mínimos en ahorro, en precios, en consumo, etc para ello tendremos que plantear a partir de los datos de un problema, y calcula el máximo o mínimo absoluto de dicha función.

Para calcular los extremos absolutos debemos tener en cuenta que estos se encuentran:

a) En los puntos de derivada 0.

b) En los extremos del intervalo.

c) En los puntos en los que no es derivable.

Para resolver un problema de optimización tendremos en cuenta los siguientes pasos:

1.- Elección de las incógnitas. Nombrarlas.

2.- Planteamiento de una ecuación a partir de los datos.

3.- Planteamiento de la función a partir de los datos.

4.- Despejar una incógnita en función de la otra de la ecuación planteada en el punto 2. Sustituir en la función obtenida en el punto 3 con lo cual conseguiremos una función de una sola incógnita.

5.- Calcular el máximo o mínimo de dicha función. (Puede haber más de una o ninguna solución. Tendremos que ir con cuidado porque dichas soluciones no siempre están donde la derivada vale cero).

6.- Comprobación de la solución.

Ejercicio 1: De entre todos los triángulos rectángulos de área 8 cm^2, determina las dimensiones del que tiene la hipotenusa de menor longitud.

Ejercicio 2: Se desea construir un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de 125 m^3. Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima.

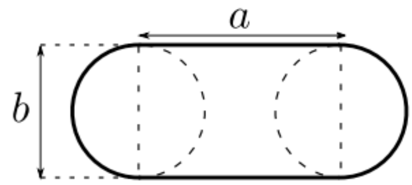
Ejercicio 3: De entre todos los números reales positivos, determina el que sumado con su inverso da suma mínima.

Ejercicio 4: Una familia desea acotar una zona rectangular en el jardín de su casa para dedicarla al cultivo ecológico. Para ello dispone de 96 metros de valla, pero necesita una abertura de 4 metros en uno de los laterales para instalar una puerta. Determina las dimensiones de la zona rectangular de área máxima que puede acotarse de esta manera y el valor del área.

Ejercicio 5: En un jardín diseñamos dos parterres, uno circular y el otro cuadrado. Para construirlos disponemos de una cuerda de 100 m. Averigua el perímetro de cada uno de ellos, si queremos que la suma de las áreas sea máxima.

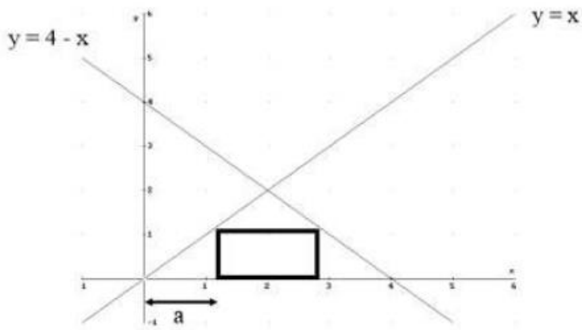
Ejercicio 6: Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima inscrito limitado por la gráfica de la función f:IR → IR definida por $f(x) = -x^2 + 12$ y el eje de abscisas, y que tiene su base sobre dicho eje.

Ejercicio 7: Se quiere cercar un trozo de terreno como el de la figura, de modo que el área del recinto central rectangular sea de $\frac{200}{\pi}$ metros cuadrados. Sabiendo que el coste de la cerca que se puede poner en los tramos rectos es de 10 euros por metro lineal, y en los tramos circulares de 20 euros por metro lineal, calcula las dimensiones a y b del terreno para las que se minimiza el coste del cercado.



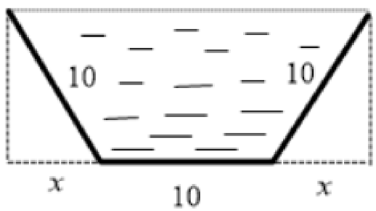
Ejercicio 8: Se desea construir un rectángulo, como el de la figura, de área máxima. La base está situada sobre el eje OX, un vértice está en la recta y = x y el otro, en la recta y = 4 – x. Se pide:

a) Halla la altura del rectángulo en función de a (ver figura)
b) Halla la base del rectángulo en función de a.
c) Encuentra el valor de a que hace máximo el área del rectángulo.

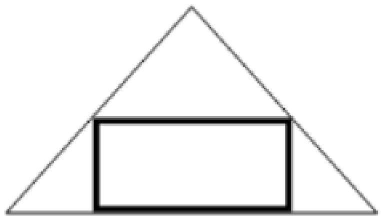


Ejercicio 9: Se desea construir una canaleta, para la recogida de agua cuya sección es como la de la figura. La base y los costados deben medir 10 cm y se trata de darle la inclinación adecuada a los costados para obtener una sección de área máxima. Se pide:

a) Halla la altura de la canaleta en función de x.
b) Halla el área de la sección de la canaleta en función de x.
c) Encuentra el valor de x que hace máximo dicha área.



Ejercicio 10: Considera un triángulo isósceles en el que el lado desigual mide 8 cm y la altura correspondiente mide 5 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en dicho triángulo.



Ejercicio 11: Se desea construir una caja sin tapadera de base cuadrada. El precio del material es de 18 euros/m^2 para los laterales y de 24 euros/m^2 para la base. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir si disponemos de 50 euros.

Ejercicio 12: Dada la función f:IR → IR definida por f(x) = $6 - \frac{1}{6}x^2$, calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido entre la gráfica de f y la recta y = 0.

Ejercicio 13: De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de las funciones f,g: IR → IR, definidas por f(x) = $4 - \frac{x^2}{3}$ y g(x) = $\frac{x^2}{6} - 2$.

Ejercicio 14: Un alambre de 10 m de longitud se divide en dos trozos. Con uno de ellos se forma un triángulo equilátero y con el otro un cuadrado. Halla la longitud de dichos trozos para que la suma de las áreas sea mínima.

Ejercicio 15: Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de $\sqrt{5}$ cm. de radio, de forma que uno de sus lados está contenido en el diámetro del semicírculo y el lado opuesto tiene sus vértices sobre la semicircunferencia. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que es el de mayor perímetro posible.

Ejercicio 16: De un terreno se desea vender un solar rectangular de 12 800 m^2 dividido en 3 parcelas iguales como las que aparecen en el dibujo. Se quieren vallar las lindes de las tres parcelas (los bordes y las separaciones de las parcelas). Determina las dimensiones del solar y de cada una de las tres parcelas para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.

Ejercicio 17: Se quiere construir un bote de conservas cilíndrico, con tapa, de un litro de capacidad. Calcula las dimensiones del bote para que en su construcción se utilice la menor cantidad posible de hojalata.

Ejercicio 18: Una imprenta recibe un encargo para realizar una tarjeta rectangular con las siguientes características: la superficie rectangular que debe ocupar la zona impresa debe ser de 100 cm^2, el margen superior tiene que ser de 2 cm, el inferior de 3 cm y los laterales de 5 cm cada uno. Calcula, si es posible, las dimensiones que debe tener la tarjeta de forma que se utilice la menor cantidad de papel posible.

Ejercicio 19: Se quiere hacer una puerta rectangular coronada por un semicírculo como el de la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 m^2. Si es posible, determina la base x para que el perímetro sea mínimo.

Ejercicio 20: Se necesita construir un depósito cilíndrico, con tapas inferior y superior, con capacidad de 20π m^3. El material para las tapas cuesta 10 euros cada m^2 y el material para el resto del cilindro 8 euros cada m^2. Calcula, si existe, el radio de las tapas y la altura del cilindro que hace que el coste total sea mínimo.

Ejercicio 21: Partimos un hilo metálico de longitud 1 m en dos trozos haciendo con uno un cuadrado y con el otro, un círculo. Calcula las dimensiones de cada trozo para que la suma de las áreas sea mínima. ¿Cuándo será máxima?

Ejercicio 22: Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto A = (4, 3) y determina con los semiejes positivos un triángulo de área mínima.

Ejercicio 23: De entre todos los segmentos que determinan los ejes positivos de coordenadas y que pasan por el punto (8, 1), averigua la ecuación de la recta que contiene al de longitud mínima.

Ejercicio 24: Calcula el punto P de la curva $y = -x^3 + 3x$ en el que es máxima la pendiente de la recta tangente a la curva.

4.2 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL.

Características de una función que se pueden tener en cuenta al esbozar la gráfica de una función:

<u>1º Paso:</u> Dominio de la función (Es el conjunto de números reales que tienen imagen por f. Recuerda, tenemos que tener cuidado con los denominadores, raíces de índice par y logaritmos).

2º Paso: Simetrías.
a) Función de simetría par $f(x) = f(-x)$, simétrica respecto al eje y.
b) Función de simetría impar $f(-x) = -f(x)$, simétrica respecto al origen de coordenadas.

3º Paso: Periodicidad, normalmente la encontraremos en las funciones trigonométricas. Debemos indicar si es periódica y cuál es el periodo T, siendo $f(x + T) = f(x)$.

4º Paso: Puntos de corte con los ejes.
a) Con el eje OY $x = 0$
b) Con el eje OX $y = 0$

5º Paso: Asíntotas.
a) Asíntota vertical en **x = a** si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ (incluso aunque solo sea por la derecha o por la izquierda).
b) Asíntota horizontal en **y = k** si $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$ (Cuidado, las funciones con raíces o exponenciales, puede cambiar el signo o valor de k según vayamos al $+\infty$ o al $-\infty$).
c) Asíntota oblicua en $y = mx + n$ siendo $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$. (Al igual que en la asíntota horizontal debemos tener cuidado con los signos y el valor según vayamos al $+\infty$ o al $-\infty$, también debemos tener en cuenta que si existe asíntota horizontal no puede existir la oblicua, aunque si podemos tener asíntotas diferentes cuando vayamos al $+\infty$ o al $-\infty$, así puede ocurrir en funciones exponenciales y a trozos).

6º Paso: Continuidad de f (Lo interesante es señalar los tipos de discontinuidades que hay, sobre todo en una función a trozos).

7º Paso: Monotonía de f y extremos relativos.
a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento (cuidado con los puntos que no están en el dominio o en los extremos de los intervalos de definición).
b) Extremos relativos, indicando las dos coordenadas del punto y si se trata de un máximo o un mínimo. (Tenerlo en cuenta a la hora de dibujar)

8º Paso: Curvatura y puntos de inflexión (cuidado con los puntos que no están en el dominio o en los extremos de los intervalos de definición).
a) Intervalos de convexidad y concavidad.
b) Puntos de inflexión. Recordar que es importante tener las dos coordenadas para poder dibujarlos, además de tener en cuenta si el cambio es de cóncava a convexa o de convexa a cóncava, si crece o decrece.

9º Paso: Recorrido de la función, es el conjunto de los números reales que son imagen mediante f.

10º Paso: Signo de la función.

Ejercicio 25: Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^6}{x^4 - 1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^6 + 1}{x^3 - x}$

c) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + 4}$ d) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}x + \operatorname{tg}x}{\cos x}$

Ejercicio 26: Estudia la periodicidad de las siguientes funciones:

a) f(x) = sen x + tag x b) f(x) = tag (πx)

c) f(x) = sec(x) d) f(x) = sen(x) + cos(3x)

Ejercicio 27: Para la función $f(x) = \dfrac{2x + k}{x^2 - 2x + 1}$:

a) Halla el valor de k para que f tenga un máximo relativo en el punto x = 2. ¿Cuál es el valor de este máximo?
b) Estudia, si es que existen, el resto de los extremos relativos de la función.

Ejercicio 28: En cierto momento, el número de bacterias en un cultivo es de 3000. Debido a ciertas condiciones ambientales, este número evoluciona según el modelo $N(t) = 3 - \dfrac{2Ln(t + 1)}{t + 1}$ donde t representa los días que han pasado desde el instante inicial y N(t) representa los miles de individuos que hay en cada momento:

a) Comprueba que, efectivamente, en el momento inicial hay 3000 individuos.
b) Estudia si, con el paso de los días, la población se estabiliza indica hacia qué valor.
c) En qué momento la población es la menor posible. ¿Cuál es dicha población?
d) Dibuja su gráfica.

Ejercicio 29: Según un determinado modelo, la concentración en sangre de cierto medicamento viene dada por la función $C(t) = t\, e^{-\frac{t}{2}}$ mg/ml, siendo t el tiempo en horas transcurridas desde que se le administra el medicamento al enfermo.

a) Determina, si existe, el valor máximo absoluto de la función y en qué momento se alcanza.
b) Sabiendo que la máxima concentración sin peligro para el paciente es 1 mg/ml, señala si en algún momento del tratamiento hay riesgo para el paciente.

Ejercicio 30: Considera las funciones f,g: IR → IR definidas por f(x) = $|x|$ - 2 y por g(x) = 4 - x^2 . Halla los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones y esboza el recinto que delimitan.

Ejercicio 31: Considera la función f: IR → IR definida por f(x) = $4x^3 - x^4$. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. Esboza la gráfica de f.

Ejercicio 32: Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & si\ x < 0 \\ (x-2)^2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$ .Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función.

Ejercicio 33: Considera las funciones f,g: IR → IR definidas por $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 2$. Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza sus gráficas.

Ejercicio 34: Considera la función f:IR → IR definida por $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
b) Determina los intervalos de convexidad y de concavidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica.

Ejercicio 35: Considera la función f: IR → IR definida por $f(x) = x^3 - x$. Representa la función y la recta normal a dicha gráfica en el punto de abscisa $x = 0$.

Ejercicio 36: Representa las funciones:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ monotonía

b) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$ monotonía

c) $f(x) = \frac{2x+4}{x-3}$ completo

d) $f(x) = \frac{3x}{x^3-8}$ monotonía

e) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ completo

f) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2-4}$ completo

g) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3+1}{x}}$ dominio, cortes, asíntotas, monotonía

h) $f(x) = x^2 e^x$ dominio, cortes, asíntotas, monotonía

i) $f(x) = Ln(x^2 - 4)$ completo

j) $f(x) = \frac{1+|x|}{1-|x|}$

k) $f(x) = \frac{x}{Lnx}$

l) $f(x) = |\cos x|$

m) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$