TEMA 5: INTEGRAL INDEFINIDA.

5.1 PRIMITIVAS: PROPIEDADES. INTEGRAL INDEFINIDA.

Dada una función f definida en [a, b], se llama **primitiva** (antiderivada) de f en [a, b] a toda función F definida en [a, b] tal que $F'(x) = f(x) \ \forall x \in [a, b]$.

$$F \text{ primitiva de } f \Leftrightarrow F' = f$$

Propiedades:

1) Si F(x) es una primitiva de f(x) en [a, b], y *C* una constante, entonces F(x) + *C* es una primitiva de f(x) en [a, b].
Demostración: $F'(x) = f(x) \Rightarrow (F(x)+C)' = F'(x) + (C)' = F'(x) = f(x)$

2) Si F(x) y G(x) son primitivas de f(x) en [a, b]. Entonces F(x)-G(x) = *C* (constante) en [a, b]
Demostración: $(F(x)-G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \ \forall x \in [a, b]$, luego $F(x)-G(x) = C \ \forall x \in [a, b]$ por el teorema de Lagrange.

Como consecuencia de estas dos propiedades, si F(x) es una primitiva de f(x), entonces el conjunto de todas las primitivas de f(x) es de la forma: $\{F(x) + C,\ C \in IR\} = \int f(x)dx$ y se llama **integral indefinida** de f. De modo que $F(x) \in \int f(x)dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$.

Se denota por $\int f(x)dx = F(x) + C$

3) De la definición de integral indefinida se obtiene $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

4) Linealidad de la integración:

1) Una primitiva de la suma de dos funciones es la suma de las primitivas de cada una de ellas. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

2) Una primitiva de un número real k por una función f(x) es k por una primitiva de f(x): $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

Cuando se utilizan estas propiedades para calcular una primitiva de una función, se dice que se <u>integra por descomposición</u>.

Este año aprenderemos la resolución de integrales inmediatas a partir del conocimiento de las fórmulas de las derivadas y ajustando cuando sea necesario.
Ejercicio 1: Resuelve las siguientes integrales inmediatas:

1) $\int 2x dx$ 2) $\int 3x^2 dx$ 3) $\int 4x^3 dx$

4) $\int 10x^4 dx$ 5) $\int 4x dx$ 6) $\int 18x^8 dx$

7) $\int 2x^4 dx$ 8) $\int x^5 dx$ 9) $\int 3x^5 dx$

10) $\int 2 dx$ 11) $\int (x^2 - 3x + 5) dx$ 12) $\int (-x^3 + 3x - 1) dx$

13) $\int (2x^4 + x^2) dx$ 14) $\int (-x^5 - 1)^2 dx$ 15) $\int (-2x + x^4) dx$

16) $\int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx$ 17) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{-2/3} dx$ 18) $\int \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{5x}} dx$

19) $\int (x-3)^5 dx$ 20) $\int (x+2)^3 dx$ 21) $\int (3x-1)^2 dx$

22) $\int \frac{1}{x^2} dx$ 23) $\int \frac{3}{x^3} dx$ 24) $\int \frac{1}{(x-3)^2} dx$

25) $\int \frac{1}{(2x-3)^3} dx$ 26) $\int (x^2 - 3)^2 dx$ (desarrollando) 27) $\int (x^4 + \frac{1}{x^4} - 2\sqrt[3]{x^2}) dx$

28) $\int \operatorname{sen} x dx$ 29) $\int \cos(3x+2) dx$ 30) $\int [\operatorname{sen} x + \cos(3x+2)] dx$

31) $\int [\operatorname{sen} 2x + \cos(1-2x)] dx$ 32) $\int 2x \operatorname{sen} x^2 dx$ 33) $\int (3\cos x - 2) dx$

34) $\int \frac{1}{x} dx$ 35) $\int \frac{3}{x-2} dx$ 36) $\int \operatorname{tag} x dx$

37) $\int \operatorname{cotg} x \, dx$ 38) $\int \frac{\cos x}{2\operatorname{sen} x + 5} dx$ 39) $\int \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x + 7} dx$

40) $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ 41) $\int \frac{2}{1 + x^2} dx$ 42) $\int \frac{2}{4 + x^2} dx$

43) $\int \frac{1}{3 + x^2} dx$ 44) $\int \frac{x}{1 + x^4} dx$ 45) $\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx$

46) $\int e^{2x+1} dx$ 47) $\int x^2 e^{x^3} dx$ 48) $\int \cos x . e^{\operatorname{sen} x} dx$

49) $\int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx$ 50) $\int \frac{1}{\sqrt{4 - 9x^2}} dx$ 51) $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} dx$

52) $\int \frac{2}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx$ 53) $\int \cos x . \operatorname{sen}^2 x \, dx$ 54) $\int \cos x \operatorname{sen} x \, dx$

55) $\int x.(x^2 + 3)^4 dx$ 56) $\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx$ 57) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx$

58) $\int \frac{3}{\sqrt{5x - 4}} dx$ 59) $\int \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}} dx$ 60) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x+1} dx = \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+1}} dx$

5.2 MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

Una técnica útil de integración se basa en la regla de la derivada de un producto

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

esta ecuación demuestra que $\int u'(x)\, v(x)\, dx + \int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) + C$

luego se puede escribir $\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int v(x)\, u'(x)\, dx$

Prescindimos de la constante C, acordándonos de sustituirla después. Esta fórmula nos permite calcular $\int u(x)\, v'(x)dx$ si sabemos calcular $\int v(x)\, u'(x)dx$. Se puede expresar solo en términos de diferenciales (suprimiendo el argumento x).

$$d(uv) = du \cdot v + u\, dv \Rightarrow \int \mathbf{udv = uv - \int vdu}.$$

Teniendo en cuenta que $du = u'(x)\, dx$ $dv = v'(x)\, dx$. Y para la elección de u debemos tener en cuenta la siguiente regla:

- A Arctg, arcsen
- L Logaritmos
- P Polinomios
- E Exponenciales
- S Seno, coseno

La integración por partes tiene algunas características que se ven reflejadas en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1) $I = \int x \cos x\, dx$

elegimos $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x \end{cases}$ de modo que:

$I = x \operatorname{sen}x - \int \operatorname{sen}x\, dx = x \operatorname{sen}x - (-\cos x) + C = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$

las elecciones de u y dv fueron acertadas, debido a que se pudo obtener la función v por integración y debido también a que fue posible calcular $\int v\, du$, téngase esto en cuenta al elegir u.

Ejemplo 2) $\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x + C$ $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

Ejemplo 3) A veces hay que tomar $dv = dx$,

$\int Ln\, x\, dx = x\, Lnx - \int dx = x\, Lnx - x + C.$ $\begin{cases} u = Lnx \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}\, dx \\ v = x \end{cases}$

Ejemplo 4) Otro artificio interesante consiste en utilizar la integración por parte para hallar $\int f(x)\,dx$ en términos otra vez de $\int f(x)\,dx$, y después despejar $\int f(x)\,dx$ en la ecuación resultante.

$$I = \int \frac{1}{x} Lnx\,dx = Lnx\,Lnx - \int \frac{1}{x} Lnx\,dx = Lnx\,Lnx - I$$

$$\begin{cases} u = Lnx \\ dv = \frac{1}{x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} I = Lnx\,Lnx - I \Rightarrow \\ \Rightarrow 2I = Lnx\,Lnx \end{array} \right. \qquad I = \frac{(Lnx)^2}{2} + C$$

Ejemplo 5) A veces hay que hacer una integración preliminar antes de resolver el sistema.

$$\int Lnx\,Lnx\,dx \quad \begin{cases} u = Lnx \\ dv = Lnx\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = x\,Lnx - x \end{cases}$$

Ejemplo 6) Integración por partes de forma reiterada:

$$\int x^2 senx dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx = -x^2\cos x + 2(xsenx - \int senx dx) =$$

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = senx\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = \int senx\,dx = -\cos x \end{cases} \qquad \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int cosx\,dx = senx \end{cases}$$

Ejercicio 2: Resuelve las siguientes integrales por el método de integración por partes:

1) $\int \frac{x}{e^x} dx =$

2) $\int x^2\,Lnx\,dx =$

3) $\int \frac{Ln(Lnx)}{x} dx =$

4) $\int x^2 \cos x\,dx =$

5) $\int x^2 e^x\,dx =$

6) $\int \cos x\, e^x\,dx =$

7) $\int arctgx\,dx =$

8) $\int \frac{arcsenx}{\sqrt{1+x}} dx =$

Voluntarios:

9) $\int x\,senx\,dx =$

10) $\int x\,Lnx\,dx =$

11) $\int arcsenx\,dx =$

13) $\int \cos(Lnx)\,dx =$

14) $\int e^x\,sen2x\,dx =$

5.3 MÉTODO DE INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES.

Al resolver una integral racional debes tener en cuenta si es:

1º) Fracción simple: Ya las vimos como integrales inmediatas.

a) $\int \frac{A}{x-a} dx = A\,Ln|x - a| + C$

b) $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C \;\; (n \neq 1)$

c) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = Ln|f(x)| + C$

2º) <u>Racional procedente de una arcotangente</u> (en el denominador tenemos un polinomio de 2º grado sin raíces reales). Ya hemos visto algunas como inmediatas, veamos algunas más:

1) $\int \frac{2}{4+5x^2}dx =$

2) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}dx =$

3) $\int \frac{2}{x^2-6x+13}dx =$

4) $\int \frac{-3}{4x^2+8x+5}dx =$

5) $\int \frac{2x+3}{4x^2+8x+5}dx =$

3º) <u>Racional.</u>

Son de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ donde P(x) y Q(x) son funciones polinómicas.

a) *PRIMER PASO*: Si grado P ≥ grado Q, efectuamos la división entera de P por Q, expresando: $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ donde C(x) y R(x) son funciones polinómicas.

$$* \int \frac{x^3}{x^2-1}dx = \int x\,dx + \int \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}Ln|x^2-1| + C$$

b) *SEGUNDO PASO*: Supongamos grado P < grado Q. Supondremos P y Q primos, de lo contrario podríamos simplificar. Calculamos las raíces del polinomio Q(x) <u>que son reales</u> (es lo que nos exigen, el próximo año sabremos que ocurre en caso de que no todas las raíces sean reales), siendo Q(x) = (x - a) (x - b)^3. Podemos descomponer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples de la siguiente forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{(x-b)^2} + \frac{D}{(x-b)^3}$$

Calculando las constantes A, B, C, D, por el método de los coeficientes indeterminados (o bien, x = a, x = b, … etc.)

$$* \int \frac{x}{x^3+5x^2+8x+4}dx =$$

$$* \frac{x}{x^3+5x^2+8x+4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x+2)(x+1) + B(x+1) + C(x+2)^2}{(x+2)(x+2)^2(x+1)}$$

$$\int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{2}{(x+2)^2}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx = Ln|x+2| - Ln|x+1| - \frac{2}{x+2} = Ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right| - \frac{2}{x+2} + C$$

Ejercicio 3: Resuelve las siguientes integrales de funciones racionales (voluntarias desde 9 al 12):

1) $\int \frac{5}{x-2}\,dx =$

2) $\int \frac{7}{(x-2)^2}\,dx =$

3) $\int \frac{3}{(2x-1)^3}\,dx =$

4) $\int \frac{6x+3}{x^2+x+3}\,dx =$

5) $\int \frac{x}{x^2+x-2}\,dx =$

6) $\int \frac{3x^3+1}{x^2+x-2}\,dx =$

7) $\int \frac{x}{(x+2)^2}\,dx =$

8) $\int \frac{x+1}{(x-3)(x-5)}\,dx =$

9) $\int \frac{x-1}{x^2+x-6}\,dx =$

10) $\int \frac{x+2}{x^2-4x-5}\,dx =$

11) $\int \frac{x+1}{x^2-x-6}\,dx =$

12) $\int \frac{3x+1}{2x^2+6x-20}\,dx =$

13) $\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,dx =$

14) $\int \frac{-2x^2+9x-8}{x^2-4x+5}\,dx =$

15) $\int Ln(x+3)dx =$

5.4 INTEGRACION POR CAMBIO DE VARIABLES. (Por sustitución).

El método de integración por sustitución se basa en la regla de la cadena y trata de reducir una integral a otra inmediata o de cálculo más fácil. *En la carpeta de antiguos viene esta parte más teórica.*

Para calcular $\int f(x)dx$ se pueden seguir diferentes dos procedimientos.

1º) f y g´ continuas, con $t = g(x)$ $\quad dt = g'(x)dx \qquad \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$

2º) $x = g(t)$, $dx = g'(t)\,dt \qquad \int f(x)dx = \int f(g(t))\,g'(t)dt$

Muchos de las integrales que hemos resuelto de forma inmediata pueden ser resueltas por sustitución. Cuando sea necesario un cambio, éste nos vendrá dado. Veamos la diferencia entre los dos cambios.

EJEMPLOS:

1º) $\int sen^2x\cos x\,dx = \int (senx)^2(senx)'\,dx = \int t^2dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{sen^3x}{3} + C$

t = sen x, derivando, 1 dt = <u>cosx dx</u>, buscar lo subrayado en la integral y sustituir por dt

2º) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{sent}{\cos t}\cos t\, dt = \int sent\, dt = -\cos t + C = -\cos[\arcsen x] + C =$

$-\sqrt{1-x^2} + C$, arcsenx quiere decir el ángulo cuyo seno vale x, por tanto su coseno es…

x = sent , dx = cos t dt Además $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-sen^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ y t = arcsen x

Ejercicio 4: Resuelve las siguientes integrales por el método de sustitución (indicar los cambios), voluntarios 14, 15 y 16:

1) $\int sen^3 x \cos x\, dx =$ $t = senx$

2) $\int tag^3 x \sec^2 x\, dx =$ $t = tagx$

3) $\int e^{sen^2 x}\, sen2x\, dx =$ $t = sen^2 x$

4) $\int \frac{sen(Lnx)}{x}\, dx =$ $t = Lnx$

5) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx =$ $t = x^2$

6) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-Ln^2 x}}\, dx =$ $t = Lnx$

7) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}\, dx =$ $x = Ln(t^2 - 1)$

8) $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx =$; $x = t^2 + 1$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$; $x = t^6$

10) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx$; $x=t^2$

11) $\int \frac{\sqrt{5x}}{\sqrt{5x}-1}dx$; $x=t^2/5$,

12) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx =$ $t=\sqrt{x^2-1}$

13) $\int \frac{x}{\sqrt{x+3}}dx$; $x=t^2-3$

14) $\int \frac{2}{3x+2\sqrt{x}}dx$

15) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; $x=t^2$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}+\sqrt[3]{1-x}}$ $x=-t^6+1$,

Ejercicio 5: Resuelve las siguientes integrales:

1) $\int$ x arctgx dx = Por partes y después racional.

2) $\int arctg\sqrt{x}\, dx \rightarrow x = t^2$ primero debes realizar el cambio de variable, después por partes.

3) $\int \frac{arcsenx}{x^2}dx \rightarrow$ contiene los tres métodos.

Ejercicio 6: Determina f(x) sabiendo que $f'''(x) = 24x$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, $f(0) = 0$.

Ejercicio 7: De una función y = f(x), x > - 1, se sabe que tiene por derivada $y' = \frac{a}{1+x}$ donde a es una constante. Determina la función si, además, se cumple que f(0) = 1 y f(1) = -1.

Ejercicio 8: De la función f: (-1,+∞) → IR se sabe que $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$ yque f(2) = 0.

a) Determina f.
b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0,1).