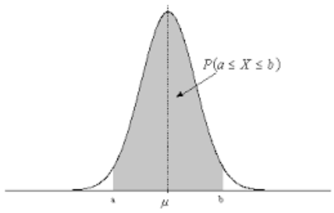
TEMA 6: INTEGRAL DEFINIDA.

6.1 Integral definida como límite de sumas superiores o inferiores.
6.2 Propiedades de la integral definida.
6.3 Regla de Barrow.
6.4 Aplicaciones de la integral definida (Área).

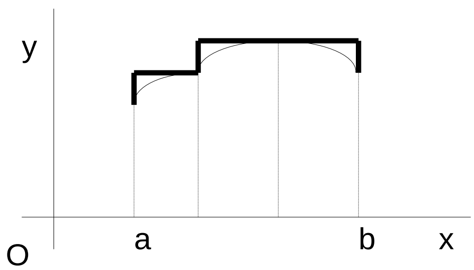
6.1 Integral definida.

Sea f una función continua y positiva, en el intervalo [a, b]. Se llama **trapecio mixtilíneo** a la región plana limitada por:
a) La gráfica de la función $y = f(x)$
b) El eje de abscisas (recta $y = 0$)
c) Las ordenadas en a y b (rectas $x = a$, $x = b$)

Podemos denotarlo por
$R = R(f;a, b) = \{ (x, y) \ / \ a \leq x \leq b, \ \ 0 \leq y \leq f(x)\}$



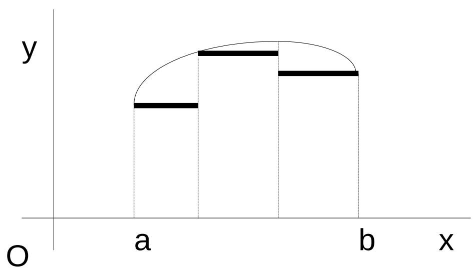
Nos proponemos calcular A = área $R(f;\ a,\ b)$ que llamaremos integral definida de f entre a y b. Consideremos una partición del intervalo [a,b] que es un subconjunto ordenado y finito de números reales,
$P_n = \{ x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ con $x_0 = a$ y $x_n = b$, obteniendo los intervalos: $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... $[x_{n-1}, x_n]$. Por el teorema de Weierstrass, f alcanza máximo en cada intervalo, obteniendo:



Podemos calcular la suma de las áreas de los rectángulos superiores que es una aproximación por exceso del área R(f; a, b):

$$S(f, P_n) = (x_1 - x_0) M_1 + (x_2 - x_1) M_2 + ... + (x_n - x_{n-1}) M_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i$$

Análogamente, por el teorema de Weierstrass, f alcanza mínimo en cada intervalo y obtenemos:



Podemos calcular la suma de las áreas de los rectángulos inferiores, que es una aproximación por defecto del área R(f; a, b):

$$I(f, P_n) = (x_1 - x_0)\, m_1 + (x_2 - x_1)\, m_2 + \ldots + (x_n - x_{n-1})\, m_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, m_i$$

NOTA: La partición P es más fina que P´ si $P' \subset P$. Cuánto más fina sea la partición, más nos aproximamos al área de R(f; a, b), es decir:

$$\lim_{n\to\infty} I(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n) = \text{Área } R(f; a, b)$$

Sea f continua y positiva en el intervalo [a,b] se define la **integral definida de f (integral de Riemann) en [a,b]** como el área de la región del plano limitada por la gráfica f, el eje de abscisas y las rectas x=a y x=b. Se denota por $\int_a^b f(x)dx$, siendo a y b los límites de integración y f(x) el integrando.

Si una función f verifica que $\lim_{n\to\infty} I(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n)$ se dice que es **integrable**.

***Si una función es negativa en dicho intervalo la integral será negativa, por tanto el área será su valor absoluto. Si f toma valores positivos y negativos, la integral podrá ser +, - o nula.

6.2 Propiedades de la integral definida.

Tenemos las siguientes propiedades:

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$ para todo f.

2) Si f(x) > 0 y continua en [a,b] entonces $\int_a^b f(x)dx > 0$

Si f(x) < 0 y continua en [a,b] entonces $\int_a^b f(x)dx < 0$

3) *Aditividad del intervalo*. Si f es continua en [a, b] y $c \in [a, b]$ entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

**También es cierto si $c \notin [a, b]$

4) *Linealidad del integrando.* Si f, g son continuas en [a, b] y k un número real:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b kg(x)dx = k \int_a^b g(x)dx$$

5) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

6) Monotonía de la integral. Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$

entonces $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Teorema del valor medio del cálculo integral: Si f es continua en el intervalo [a,b] entonces existe $c\in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$. Al número f(c) se le llama **valor medio** de f en el intervalo [a, b].

Demostración:

Sean m y M el mínimo y el máximo de la función f. Podemos afirmar que:

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)M$$

Dividiendo por b-a obtenemos:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M; \quad m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

Por ser f continua, el teorema de los valores intermedios nos asegura que f toma todos los valores comprendidos entre el mínimo m y el máximo M, luego existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\ .$$

6.3 Regla de Barrow.

Teorema fundamental cálculo integral: Sea f continua en [a, b] y definimos F de la siguiente forma $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ con $x \in [a, b]$, entonces podemos afirmar que F es derivable en (a, b) y $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$.

Demostración:

Por definición $F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$, aplicando la definición de F obtenemos:

$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}$; por la aditividad de la integral tenemos:

$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$; por el teorema del valor medio del cálculo integral $F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c)h}{h}$ con $c\in(x, x+h)$; $F'(x) = f(c)$ con $c\in(x, x+h)$ y $h\to 0$; entonces $F'(x) = f(x)$.

Regla de Barrow: Si f es continua en [a, b] y F una primitiva de f,

entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Demostración:

Sea F una primitiva de f, por el teorema fundamental del cálculo integral $\int_a^x f(t)dt$ es una primitiva de f, entonces $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$.

Para x = a obtenemos $0 = F(a) + C$, por tanto $C = - F(a)$

Para x = b obtenemos $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Ejercicio 1: Calcular $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} =$

Ejercicio 2: Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{-3}^{3} |x|\,dx =$ b) $\int_{-1}^{1} \left(x^3 + \operatorname{sen}x\right)dx =$

c) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\,dx =$

Ejercicio 3: Determinar a y b para que f sea continua y calcular $\int_{-2}^{2} f(x)dx$, siendo

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\pi x + a & x \le -1 \\ ax + b & -1 < x \le 0 \\ x^2 + 2 & x > 0 \end{cases}.$$

Ejercicio 4: Deriva las siguientes funciones:

a) $A(x) = \int_0^x \operatorname{sen}t\,dt$

b) $B(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

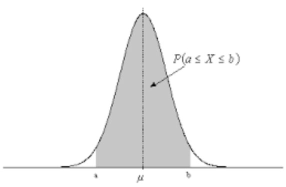
c) $C(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}t\,dt =$

Ejercicio 5: Hallar los máximos y mínimos de la función $G(x) = \int_1^x \frac{Lnt}{t}dt$

6.4 Aplicaciones de la integral definida (Área).

Cálculo del área determinado por f y g, dos funciones integrables en [a, b]:

1er Caso: Si $f(x) \ge 0 \ \forall \ x \in [a, b]$ y R la región plana limitada por la gráfica y = f(x), y las rectas x=a, x=b, y=0.

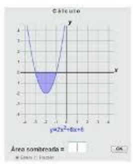


$$A(R) = \int_a^b f(x)dx$$

Ejercicio 6: Calcula el área de la región limitada por la gráfica de y = $\frac{x}{1+x^2}$, el eje X y las rectas x = 1 y x = 2.

2º Caso: Si $f(x) \le 0 \ \forall x \in [a, b]$ y R la región plana limitada por la gráfica y=f(x), y las rectas x=a, x=b, y=0.

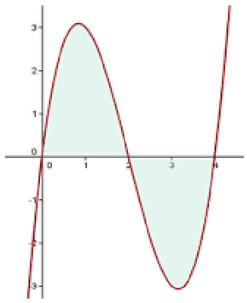
Calculo de Integral



$$A(R) = -\int_a^b f(x)dx$$

Ejercicio 7: Calcula el área de la región limitada por el eje X y la curva de y = $x^2 - 2x - 3$.

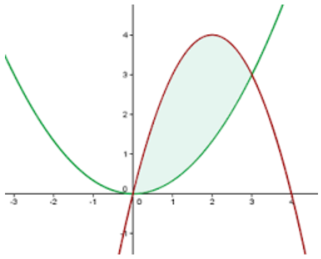
<u>3erCaso</u>: Si $f(x)$ toma valores positivos y negativos en $[a, b]$ y R la región plana limitada por la gráfica $y=f(x)$, y las rectas $x=a$, $x=b$, $y=0$. Nota: Hay que calcular los puntos de corte.



$$A(R) = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$

Ejercicio 8: Calcular el área comprendida entre la curva $y = 4-x^2$ y las rectas $x = -3$, $x = 1$, $y=0$.

<u>4º Caso</u>:Si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$ y R la región plana limitada por las gráficas $y=f(x)$, $y=g(x)$ y las rectas $x=a$, $x=b$.



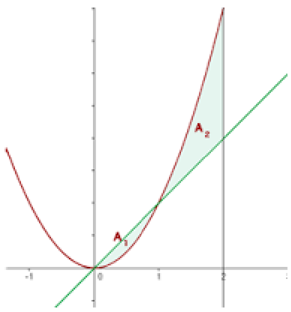
$$A(R) = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

Ejercicio 9: Calcular el área comprendida entre la parábola $y = 4 - x^2$ y la recta $y = x + 2$.

Ejercicio 10: Calcular el área comprendida entre las curvas $y = - x^2 + 4x + 1$ e $y = x^2 - 2x + 1$.

<u>5º Caso General</u>: Calcular previamente los puntos de corte entre f y g en el intervalo [a,b], en cada uno de los intervalos que se forman estudiamos que función toma valores más altos, para ello tomamos un punto cualquiera del intervalo.

$$A(R) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx = \int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^d (g(x) - f(x))dx + \int_d^b (f(x) - g(x))dx$$



Ejercicio 11: Determina el área limitada por las curvas $y = x^3 - x + 2$ e $y = - x^2 + x + 2$.