TEMA 7: MATRICES.

7.1. INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE MATRIZ.

Se define matriz de orden m x n en IR, como un conjunto de mxn números reales distribuidos en m filas y n columnas. Cada uno de esos números se llama **elemento de la** matriz. Designaremos a una matriz por $A = (a_{ij})_{mxn} = (a_{ij})$. Los subíndices indican la posición que ocupa dicho número dentro de la matriz, el elemento a_{ij} se encuentra en la fila i y en la columna j, Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$ es una matriz de orden 2 x 3.

¿A quién representa a_{22}?, ¿qué lugar ocupa -1?

Dos matrices <u>de la misma dimensión</u> son **iguales** si lo son todos los elementos que ocupan idéntica posición en ambas matrices. Es decir, A = B si $(a_{ij}) = (b_{ij})$.

Ejercicio 1: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

a) Halla el orden da cada matriz.
b) ¿Cuál es el valor de a_{13}, b_{12} y c_{32}?

Ejercicio 2: Determina x, y, z para que A y B sean iguales, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2y & -4x & 0 \\ 3 & -2 & 2z+1 \end{pmatrix}$

Página 192, ejercicio 58
Voluntarios. Página 192, ejercicios: 54, 55, 57, 59

7.2 TIPOS DE MATRICES

1. **Matriz Fila**. Es una matriz de dimensión 1xn (también llamado vector fila).
2. **Matriz Columna**. Es una matriz de dimensión mx1 (también llamado vector columna).

3. **Matriz Cuadrada**. Tiene el mismo número de filas que de columnas. Una matriz de orden nxn se llama matriz cuadrad de orden n. En estas podemos definir **diagonal principal** de una matriz cuadrada que es la formada por los elementos a_{11} , a_{22}, ..., a_{nn}. Llamamos **diagonal secundaria** a la línea determinada por a_{n1}, $a_{n-1\,2}$, ..., a_{1n}.
4. **Matriz triangular**. Es una matriz cuadrada en la que los elementos situados a un mismo lado de la diagonal principal son nulos. Si los ceros están situados por debajo de la diagonal principal se llama **matriz triangular superior** y si están situados por encima de la diagonal principal se llama **matriz triangular inferior**.
5. **Matriz diagonal**. Es una matriz cuadrada que se caracteriza porque todos los elementos que no están en la diagonal principal valen cero.
6. **Matriz escalar**. Es una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal principal iguales. Si los elementos de la diagonal principal de una matriz escalar valen 1 esta se llama **matriz unidad**, y se denomina por I o I_n.
7. **Matriz nula**. Es una matriz cuyos elementos son todos nulos.
8. **Matriz opuesta**. Dada la matriz $A = (a_{ij})$ su opuesta es $-A = (-a_{ij})$.
9. **Matriz traspuesta**. Dada una matriz $A = (a_{ij})_{mxn}$, su matriz traspuesta es aquella que se obtiene al intercambiar en la matriz A sus filas por sus columnas y se representa por A^t. La dimensión de A^t es nxm y el elemento $a^t{}_{ij}$ será igual al a_{ji} de la matriz A. Se verifica que $(A^t)^t = A$.
10. **Matriz simétrica**. Es una matriz cuadrada que se caracteriza porque aij = aji para todo i, j. $(i \neq j)$. Es decir, la matriz coincide con su traspuesta verificando $A = A^t$.
11. **Matriz antisimétrica**. Es una matriz cuadrada cuya matriz coincide con la opuesta de su traspuesta. Es decir, se caracteriza porque aij = -aji para todo i, j. $(i \neq j)$ y los elementos de la diagonal principal son todos nulos. También se llaman **hemisimétricas**. Se verifica $A = -A^t$. Por ejemplo $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7.3. EL ESPACIO VECTORIAL DE LAS MATRICES DE DIMENSIONES m x n.

Designamos por $M_{mxn}(IR)$ al conjunto de matrices de orden m x n cuyos elementos son números reales. En dicho conjunto podemos definir las siguientes operaciones:

<u>Suma de matrices:</u> $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (c_{ij})$

De manera que cada elemento de la matriz (c_{ij}) se obtiene sumando los elementos que ocupan igual posición en las matrices A y B.

Propiedades:

1º-- <u>Es interna</u>: Ya que al realizar la suma el resultado sigue siendo una matriz de orden mxn.

2º-- <u>Asociativa</u>: $[(a_{ij}) + (b_{ij})] + (c_{ij}) = (a_{ij}) + [(b_{ij}) + (c_{ij})]$

Compruébese que se cumple en virtud de la asociativa de la suma de números reales.

3º-- <u>Elemento neutro</u>:

Es la matriz cero de orden mxn (todos sus elementos son el número cero). Así cualquier matriz sumada con matriz cero se obtiene la misma matriz.

4º-- Elemento simétrico de una matriz:

Es la matriz opuesta de la matriz dada, se obtiene cambiando de signo todos los elementos de la matriz dada. De este modo, si sumamos la matriz dada con su opuesta se obtiene la matriz cero (elemento neutro). $(a_{ij}) + (-a_{ij}) = (0)$

5º-- Conmutativa: $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij})$, la cual se cumple en virtud de la propiedad conmutativa de la suma en IR.

Por verificar estas propiedades se dice que [M_{mxn}(IR), +] es un **grupo abeliano**.

Voluntarios. Página 192, ejercicios: 60, 61, 62.

Producto de un número real por una matriz:

Sea k un nº real y (a_{ij}) un elemento de M_{mxn}(IR) se define k .$(a_{ij}) = (b_{ij})$ de forma que se multiplica k por cada elemento de la matriz (a_{ij}) y así obtenemos la matriz (b_{ij}), el resultado de la operación es otro elemento de M_{mxn}(IR). A diferencia de la operación suma esta operación es externa en el sentido de que no se opera con dos matrices, sino con un nº y una matriz. Se verifican las siguientes propiedades:

6ª— Distributiva respecto de la suma de matrices k nº real, (a_{ij}) y $(b_{ij}) \in M_{mxn}$(IR):k .$[(a_{ij}) + (b_{ij})] = k .(a_{ij}) + k .(b_{ij})$

7ª— Distributiva respecto de la suma de escalares k y h nº reales, $(a_{ij}) \in M_{mxn}$(IR): $(k+h)(a_{ij}) = k(a_{ij}) + h(a_{ij})$

8ª—Asociativa mixta k y h nº reales, $(a_{ij}) \in M_{mxn}$(IR): $(kh)(a_{ij}) = k[h(a_{ij})]$

9ª—Elemento unidad 1, $(a_{ij}) \in M_{mxn}$(IR): $1. (a_{ij}) = (a_{ij})$

Por verificar el conjunto M_{mxn}(IR) estas propiedades con las operaciones suma y producto por un número real, decimos que dicho conjunto queda dotado de **estructura de espacio vectorial**.

Ejercicio 3: Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Calcula A + B, A – B, 2A - 2B, A + I, A – I, 3A + 2B – I.

Ejercicio 4: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula: A + B, B – A,

3A – 2B, 2A + B – I, 2B – 2A, $A^t + B^t$ y $(A + B)^t$.

Ejercicio 5: Obtener las matrices A y B que verifiquen el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 2A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ A-3B=\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Ejercicio 6: Calcula las matrices A y B sabiendo que

$$\left.\begin{array}{l} A+B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ \\ A-B=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Multiplicación de matrices:

Dadas las matrices A y B, se define **matriz producto** C como aquella cuyo elemento c_{ij} resulta de sumar los productos elemento a elemento, de la fila i de la matriz A por los de la columna j de la matriz B. Para poder realizar la multiplicación de dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera matriz sea igual que el número de filas de la segunda matriz. La matriz producto C va a tener igual número de filas que la primera matriz, e igual número columnas que la segunda. Es decir: $(aij)_{mxn}$ x $(bij)_{nxp}$ = $(cij)_{mxp}$. Obsérvese en cambio, que si consideramos un conjunto de matrices cuadradas Mnxn(IR) podemos multiplicar dos matrices de orden nxn para obtener otra del mismo orden. Por tanto en el conjunto de matrices cuadradas M nxn (IR) la multiplicación de matrices es una operación interna.

Propiedades del producto de matrices cuadradas de orden n:

a) Asociativa: [(aij) x (bij)] x (cij) =(aij) x [(bij) x (cij)]
b) Elemento Unidad. Se trata de la llamada matriz unidad (los elementos de la diagonal principal son todos 1, y los demás elementos vales cero. Se la designa por I. (aij) x I = I x (aij) = (aij)
c) Elemento simétrico de A es una matriz A^{-1} que verifica que A . A^{-1} =A^{-1} . A = I. La posibilidad de que exista elemento simétrico se estudiará en el tema siguiente. Se llama **matriz inversa** de la matriz dada. Adelantaremos no obstante, que no todas las matrices cuadradas tienen inversa, como veremos en el tema siguiente, por lo tanto no podemos decir que se cumpla la propiedad de existencia de elemento simétrico respecto a la operación "x". A las matrices que tienen inversa se les llama **matrices inversibles** y aquellas que no la tienen se llaman **matrices singulares**.
d) Conmutativa. No se cumple tal propiedad, contraejemplo
Siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $A \,.\, B=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -20 & -7 \end{pmatrix}$ y $B \,.\, A=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$
e) Distributiva de la multiplicación respecto de la suma de matrices, sean (aij), (bij), (cij) $\in$ Mnxn (IR) se verifica que (aij) x [(bij) + (cij)] =[(aij) x (bij)] + [(aij) x (cij)]

f) Asociativa respecto de la multiplicación por un número real. Sea k un nº y (aij),(bij) $\in$ Mnxn (IR) entonces se verifica k·[(aij) x (bij)] = [k·(aij)]·(bij)

Ejercicio 7: Con las matrices del ejercicio 3, calcula A.B, B.A, $(A.B)^t$, $(B.A)^t$, $A^t.B^t$, A^2, A^3.

Ejercicio 8: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 9 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y

$D = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Calcula A.B, B.A, A.C, C.A, C.B, B.C, A.D, C.D y A^2.

Voluntarios. Página 192, ejercicios: 63, 64, 65, 66, 67.

Ejercicio 9: Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación matricial XA = B + P.

Ejercicio 10: Dada las matrices $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación matricial MX + N = P.

Voluntarios. Página 192, ejercicios: 72, 73, 75, 77, 78, 79,80.

Observaciones:

a) A x B = O no implica que A = O ó B = O. Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$
b) Tampoco se cumple que $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2\,AB$.
c) No se cumple que si A x B = A x C entonces B = C.
d) $(A^t)^t = A^t$ $(A + B)^t = A^t + B^t$ $(A\,.\,B)^t = B^t\,.\,A^t$
e) Una matriz cuadrada A es **idempotente** si $A^2 = A$.
f) Una matriz cuadrada M es **ortogonal** si $M^t\,M = I$.

Ejercicio 11: Utilizando las matrices del ejercicio 4, calcula A.B. B.A, A^2 y B^3.

Ejercicio 12: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcula $3A - A^2 + 2I$.

Ejercicio 13: Si $A \in$ Mn (IR) y verifica que $A^2 = A$, calcula B^2 siendo B = 2A – I.

Ejercicio 14: Demuestra que $A^2 - A - 2I = O$ siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 15: Calcular las potencias n-simas de las siguientes matrices. *Resaltar la utilidad para calcular A^{100}.*

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $D = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $F = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $H=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

$I=\begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}$ $\quad$ $J=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $K=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Voluntarios. Página 192, ejercicios: 68, 70, 71, 100.

Ejercicio 16: Demuestra que cualquier matriz cuadrada se puede descomponer en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica. Aplícalo a $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 17: Se considera $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$ con a, b números reales:

a) Calcula a y b para que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
b) Para los valores obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3, A^4 y A^n.

Ejercicio 18: Halla A tal que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$

Ejercicio 19: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula otra matriz B, distinta de la matriz nula y de la matriz unidad, tal que $A \cdot B = B \cdot A$

Ejercicio 20: Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, determina, si existe, una matriz C que verifique $B \cdot C = A$.

Ejercicio 21: Halla las matrices $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, con a, b y c números reales, que satisfacen la ecuación matricial $X^2 = 2X$.

Voluntarios. Página 192, ejercicios: 74, 76.