TEMA 7: FUNCIONES.

7.1 FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL. DOMINIO.

Se define **función real de variable real** a una aplicación que a cada elemento del subconjunto D de IR (x, variable independiente) le hace corresponder un único número real llamado **imagen** (y, variable dependiente).

$$\begin{array}{ll} f: D \subset IR \longrightarrow IR & \\ \quad\quad x \longrightarrow f(x) & \\ \text{v. indep.} \quad\quad \text{v. dependiente, imagen de x mediante f, } y = f(x). \end{array}$$

A x se le llama **antiimagen** de y por f, y se denota por $x = f^{-1}(y)$.

Al conjunto de todos los números reales que tienen imagen por f se le llama **dominio de f** y se denota por Domf. Para calcular el dominio debes tener en cuenta que:

1) No existe la división por cero.
2) No existe la raíz de índice par de un número negativo.
3) No existe el logaritmo de un número negativo, ni de cero.
4) El contexto de un problema (el lado de un rectángulo no puede ser negativo, …)

Al conjunto de números reales que son imagen mediante f se le llama **imagen de f** o **recorrido** y se denota por Rec f.

Dos funciones f y g son **iguales** si tienen el mismo dominio y las imágenes para el mismo valor de x coinciden, es decir, Domf=Domg y $f(x) = g(x) \ \forall x \in \text{Domf}$.
La **gráfica** de una función f está formada por los pares de puntos (x,f(x)) con $x \in \text{Domf}$.

Ejercicio 1: Calcula el recorrido de las siguientes gráficas. Las gráficas se verán en clase.

Una función puede expresarse mediante:

1) El enunciado de un problema.
2) Una fórmula analítica.
3) Una tabla de valores.
4) Una gráfica.

Ejercicio 2: Expresa mediante una función las siguientes situaciones:

a) El precio de una cierta cantidad de café que vale 2 € el kilo.

b) El coste de una llamada telefónica, si el establecimiento de llamada es de 0,1 € y la tarifa por un minuto es de 0,2 €.
c) La relación entre la altura y la base de un triángulo cualquiera de 6 cm^2 de área, si la base es la variable dependiente.
d) El área de un rectángulo en función de uno de sus lados, sabiendo que su perímetro es de 12 cm.

Ejercicio 3: La longitud de una varilla de metal varía en función de la temperatura a la que se somete. La tabla muestra la dicha relación.

Temperatura en °C	20	40	60
Longitud en cm	3500	3501,176	3502,352

Halla la relación entre la longitud y la temperatura, ¿cuánto medirá a 80°C?

Ejercicio 4: Representa las siguientes funciones elementales:

a) $f(x) = 5$ b) $f(x) = 2x - 6$ c) $f(x) = -2x + 1$ d) $f(x) = x^2$

e) $f(x) = x^2 + 5$ f) $f(x) = (x + 5)^2$ g) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ h) $f(x) = x^3$

i) $f(x) = \frac{1}{x}$ j) $f(x) = \frac{2x-5}{x+1}$ k) $f(x) = \sqrt{x}$ l) $f(x) = \sqrt{x} + 5$

m) $f(x) = \sqrt{x+5}$ n) $f(x) = |x|$ ñ) $f(x) = |2x-6|$ o) $f(x) = |x^2-4|$

p) $f(x) = 2^x$ r) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ s) $f(x) = \log_2 x$ t) $f(x) = \log_{1/2} x$

u) $f(x) = \text{sen}x$ v) $f(x) = \cos x$ w) $f(x) = \text{tag}x$ x) $f(x) = 2 + |x|$

y) $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 0 \\ x^2+1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$

7.2 DOMINIO DE UNA FUNCIÓN.

Para poder representar una función no es suficiente una tabla de valores. Para representarla necesitamos saber sus características: dominio, recorrido, puntos de corte, signo, continuidad, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, etc. Comencemos por la primera característica: Dominio.

Ejercicio 5: Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ b) $f(x) = \frac{2x+1}{x}$ c) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$

d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2}$ e) $f(x) = \sqrt[4]{4-3x}$ f) $f(x) = \sqrt{-x^2-x+2}$

g) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ h) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+2}}$ i) $f(x) = \text{sen}(x)$

j) f(x) = tag (x) k) f(x) = 2^x l) f(x) = $\log_2(x + 1)$

m) f(x) = $Ln(x^2 + x - 6)$ n) f(x) = $\begin{cases} \frac{2x}{3} \ \ si \ \ -6 \le x < -3 \\ -2 \ \ si \ \ -1 < x < 1 \\ 5 - x \ \ si \ \ x \ge 1 \end{cases}$ ñ) $\begin{cases} Ln(x) \ \ si \ \ x < 1 \\ 5 - x \ \ si \ \ x \ge 1 \end{cases}$

Ejercicio 6: Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) f(x) = $x^3 + 1$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x - 6}$ c) f(x) = $\sqrt[7]{\frac{1}{x}}$

d) f(x) = $sen(x^2 - x + 1) - 3$ e) f(x) = $\frac{sen(x)}{\cos(x) - 1}$ f) f(x) = $sen\frac{x+1}{x}$

g) f(x) = $\sqrt{e^{x^2-x}}$ h) f(x) = $\frac{1}{e^x}$ i) f(x) = e^{senx}

j) f(x) = $e^{\frac{1}{x}}$ k) f(x) = $e^{\frac{x-1}{x+2}}$ l) f(x) = $Lnx^2 + 1$

$$m) f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+2} \ \ si \ \ x < -2 \\ -2x + 3 \ \ si \ \ -2 \le x < -1 \\ \frac{1}{x} \ \ si \ \ x \ge -1 \end{cases} \qquad n) f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2 - 16} \ \ si \ \ x < -3 \\ x^2 - 2x + 1 \ \ si \ \ x \ge 1 \end{cases}$$

Ejercicio 7: ¿Son iguales las funciones f(x) = x + 2 y g(x) = $\frac{x^2-4}{x-2}$?

7.3 CARÁCTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN: SIMETRÍA Y PERIODICIDAD.

Una función f es **simétrica respecto del eje de ordenadas** si para todo x perteneciente a su dominio se verifica que f(x) = f(-x). También se llama **simetría par**. Una función f es **simétrica respecto del origen de coordenadas** si para todo x perteneciente a su dominio se verifica que f(- x) = - f(x). También se llama **simetría impar**. Esta característica nos ayuda a su representación gráfica.

Una función f es **periódica**, de período T (T es un número real positivo) si verifica que f (x + kT) = f(x) para todo x perteneciente a su dominio y para todo entero k. A T le llamamos **período** de la función f.

Ejercicio 8: Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) f(x) = $\frac{x^6}{x^4 - 1}$ b) f(x) = $\frac{x^6 + 1}{x^3 - x}$ c) f(x) = $\frac{x + 2}{x^2 + 4}$

d) f(x) = $\frac{senx + tgx}{\cos x}$ e) f(x) = $\frac{1}{x}$ f) f(x) = senx

Ejercicio 9: Estudia la periodicidad de las siguientes funciones:

a) f(x) = senx b) f(x) = cosx c) f(x) = sen x + tag x

d) f(x) = tag (πx) e) f(x) = sec(x) f) f(x) = sen(x) + cos(3x)

7.4 OPERACIONES CON FUNCIONES.

Ejercicio 10: Dadas las funciones f(x) = x + 3 y g(x) = $\frac{1}{x}$. Calcular:

a) f(x) + g(x) = (f+g) (x) b) f(x) · g(x) = (f·g) (x) c) f(x) : g(x) = (f:g) (x)

Ejercicio 11: Calcula f + g, 1/f, f · g, f : g con las funciones de los siguientes apartados:

a) f(x) = $\frac{3x}{2x+1}$ y g(x) = $\frac{-1}{x-2}$ b) f(x) = $x^2 - x - 6$ y g(x) = $\frac{x-2}{2x-6}$

c) f(x) = $\frac{3+x}{x^2-3x}$ y g(x) = $\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$

Son las operaciones que conocemos con los polinomios, con los números,… Con las funciones podemos definir otro tipo de operaciones, ¿qué ocurre si queremos que actúe una función y después otra?, ¿hay una función sea capaz de hacer en un solo paso la aplicación de las dos funciones?

Dadas dos funciones f y g definimos la función f compuesta con g como la función que asigna a cada x del dominio de f el número g[f(x)]. Dicha función se denota por gof.

$$f: D \subset IR \longrightarrow IR \qquad\longrightarrow\qquad g: D \subset IR \longrightarrow IR$$
$$x \longrightarrow f(x) \qquad\qquad\qquad x \longrightarrow g(x)$$

$$gof : D \subset IR \longrightarrow IR$$
$$x \longrightarrow gof(x) = g[f(x).$$

Ejemplo: Dadas la funciones f(x) = 2x + 3 y g(x) = 1/x.

a) Calcula f(2), g(7)
b) Calcula (gof) (x)
c) Calcula (gof) (2), ¿qué observas?
d) Calcula (fog) (x), ¿qué observas?

Propiedades de la composición de funciones:

a) Propiedad asociativa: h o (g o f) = (h o g) o f
b) No tiene la propiedad conmutativa: g o f f o g

Ejercicio 12: Dadas las funciones f(x) = $\frac{1}{x} - 1$, *interesa poner* = $\frac{1-x}{x}$, g(x) = $\frac{x+1}{x-2}$,

h(x) = $\frac{x^2-4}{x^2+4}$, i(x) = $\frac{1}{x^2}$ y j(x) = 2x - 1. Calcula f o i, i o f, f o g, i o j y j o i .

Ejercicio 13: Calcula fog y gof de las funciones de las siguientes funciones:

a) f(x) = $x^2 - 1$ y g(x) = $\sqrt{2x-1}$ b) f(x) = $\frac{2}{3x}$ y g(x) = $\frac{2x}{3}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ y $g(x) = 3$

d) $f(x) = 2x - x^2$ y $g(x) = \sqrt{x-2}$

e) $f(x) = \cos x$ y $g(x) = 2^x$

f) $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = e^x$

g) $f(x) = \mathrm{Ln}x$ y $g(x) = e^x$

Ejercicio 14: Indica que funciones necesitamos para obtener las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ b) $f(x) = \mathrm{sen}(x^2 - 1)$ c) $f(x) = 2^{\mathrm{sen}x}$

De la definición de composición de funciones podemos obtener la definición de **función inversa respecto de la composición,** la inversa de f es otra función f^{-1} que verifica que $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x$. A la función $f(x) = x$ se llama **función identidad**.

Ejemplo: Sea $f(x) = 2x - 5$. Para calcular la inversa debemos seguir los siguientes pasos:
1) cambiar f(x) por y, $y = 2x - 5$.
2) cambiar x por y, $x = 2y - 5$
3) despejar y, la función obtenida será la inversa. $x + 5 = 2y$; $y = \frac{x+5}{2}$,
Por tanto $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

Ejercicio 15: Calcula la función inversa de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ b) $g(x) = x - 1$ c) $h(x) = \frac{x+1}{x-2}$

d) $i(x) = \frac{3-2x}{x}$ e) $j(x) = \sqrt{x^2+4}$ f) $k(x) = \sqrt{2x-1}$

g) $l(x) = x^2$ h) $m(x) = e^x$ i) $n(x) = \mathrm{Ln}x$

Ejercicio 16: Representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = |5 - 2x|$ b) $f(x) = |x^2 - 4x + 4|$ c) $f(x) = x^2 - 6$ d) $f(x) = (x - 6)^2$

e) $f(x) = x^3$ f) $f(x) = \frac{-1}{x}$ g) $f(x) = \frac{4x-1}{x}$ h) $f(x) = -\sqrt{x}$

i) $f(x) = \mathrm{Ln}(x - 1)$ j) $f(x) = -\mathrm{Ln}(x)$ k) $f(x) = 2x + |3x - 1|$ l) $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ x < 0 \\ e^x + 1 & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$

Ejercicio 17: La facturación de una compañía eléctrica cada dos meses engloba:

a) Facturación de la potencia: por cada mes y cada kw contratado la tarifa es de 2.82€
b) Consumo: por cada kw consumido, la tarifa es de 0,16€
c) Concepto fijo: 1,13€ por mes por equipo de medida.

Al importe final se le aplica un 16% de IVA. Halla la función que proporciona el importe de la factura bimestral.

Ejercicio 18: Un granjero va a cercar un huerto rectangular de 100 m^2. Uno de los lados linda con la carretera por lo que la valla será más segura con un coste de 50 €/m y por los otros lados la valla será más sencilla con un coste de 20 €/m. Calcula la función que calcula el precio de la valla en función de uno de los lados de la carretera.

Ejercicio 19: En un parking privado tenemos que abonar 2,5 € por cada hora o fracción, aunque la primera hora es gratuita y el precio máximo a pagar es de 25 €. Expresa la función correspondiente al pago del parking en función del tiempo que estemos en él.

Ejercicio 20: El área de un contenedor formado por una semiesfera de radio r y un cilindro abierto de altura h es de 32 m^2. Expresa su volumen en función del radio y determina su dominio.