Tema 8. Determinantes.

8.1. Definición del determinante de una matriz cuadrada.

Se define **producto parcial** en una matriz cuadrada como el producto que se forma con elementos de la matriz (siguiendo un orden en cuanto a las filas) con la condición de que por cada fila y columna exista obligatoriamente "uno y solo un" elemento representante. Dicho producto estará afectado por un signo, que será positivo o negativo según que la permutación de subíndices que indican columna sea par o impar.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow -a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$$

Se define el **determinante** de una matriz cuadrada A como la suma de todos los productos parciales de A. Y se denota por |A|. Veamos de forma práctica como calcular un determinante, dependiendo del orden de la matriz.

a) Si la matriz es de orden 2 será de la forma $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

entonces $|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}\, a_{21}$.

Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $|A| = -3 -4 = -7$

b) Si la matriz es de orden 3 será de la forma $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}\, a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$$

Para recordarlo de una forma más cómoda observa que van con signo positivo la diagonal principal y sus paralelas y con signo negativo la diagonal secundaria y sus paralelas, es la llamada **regla de Sarrus**.

Ejercicio 1: Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ j) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ k) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

l) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ m) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 8 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ n) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

ñ) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ o) $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ p) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

q) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ r) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ s) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

t) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ u) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

8.2. Propiedades de los determinantes.

1º) Si se cambian filas por columnas en una matriz cuadrada, su determinante no varía. Es decir, el determinante de una matriz cuadrada es igual al de su matriz traspuesta. $|A| = |A^t|$

2º) Si cambiamos entre sí dos filas o dos columnas de una matriz cuadrada, el determinante de la nueva matriz es igual al opuesto del determinante de la matriz inicial.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$$, o bien, det (C_1, C_2, C_3) = - det (C_1, C_3, C_2)

3º) Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas iguales, su determinante es nulo, es decir, det (C_1, C_2, C_2) = 0.

Demostración: $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$$

4º) Si todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada valen cero, el determinante vale cero, ya que en los productos parciales hay un elemento de cada fila y columna.

5º) Dada una matriz cuadrada si multiplicamos todos los elementos de una fila (ó columna) por un cierto nº real α, entonces el determinante de la nueva matriz es igual al determinante de la matriz inicial multiplicado por dicho nº α .

$$\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$, o bien, $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha} \begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$, o bien,

det (C_1, C_2, αC_3) = α det (C_1, C_3, C_2)

6º) Si una fila de un determinante está formada por términos que son suma de dos sumandos, el determinante es igual a la suma de determinantes del siguiente modo:

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$, es decir,

det (C_1, C_2, $C_3 + C_3'$) = det (C_1, C_2, C_3) + det (C_1, C_2, C_3')

Para su demostración simplemente tomamos un producto parcial y aplicamos la propiedad distributiva.

7º) Si en una matriz cuadrada una fila (o columna) es combinación lineal de otras entonces el determinante es nulo, es decir, det (C_1, C_2, $\alpha C_1+\beta C_2$) = 0.

8º) Dada una matriz cuadrada, si a una fila se le suman otras filas multiplicadas por factores cualesquieras, la nueva matriz tiene el mismo determinante que la matriz inicial. (Análogo para columnas). **Debes tener en cuenta** que la fila a la que sumamos la combinación lineal no puede estar multiplicada por ningún número, es decir,

det (C_1, C_2, $\alpha C_1+\beta C_2+C_3$)= det (C_1, C_2, C_3)

9º) Determinante de una matriz triangular. El determinante de una matriz triángular es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

10º) $|A.B| = |A|\ |B|$

11º) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$, su demostración se basa en la propiedad anterior, $|A|\ |A^{-1}| = |A.\ A^{-1}| = |I| = 1$, por tanto, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$. De esta propiedad deducimos que no todas las matrices tienen determinante, las matrices que tienen determinante cero no tienen inversa.

Ejercicio 2: Calcula los siguientes determinantes sin desarrollarlos, es decir, utilizando las propiedades de los determinantes:

a) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 25$ Calcula $\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a+p & c+r & b+q \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$

b) Siendo $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$

Calcular $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$, $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} =$ y $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

c) Siendo $\det(F_1, F_2, F_3) = 25$.

Calcula $\det(2F_1, F_2, F_3)$, $\det(F_2, F_1, F_3)$, $\det(2F_1+F_2, F_2, F_3)$ $\det(2F_1, F_2, F_3-F_2)$
d) Sabiendo que $\det(A) = 5$ y A es una matriz de orden n. Calcula $\det(3A)$, $\det(A^t)$, $\det(A^3)$ y $\det(A^{-1})$

Ejercicio 3: Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$ siendo a, b y c no nulos

c) $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ x+2 & 4x+8 & x+2 \\ x+1 & x+1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

Ejercicio 4: Obtener, simplificando, el desarrollo del determinante:

$$\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix}$$

Ejercicio 5: Justifica, utilizando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & bc \\ b^2 & b & ac \\ c^2 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 \\ b^3 & b^2 & 1 \\ c^3 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

8.3. Reglas prácticas para el cálculo de determinantes de orden mayor que 3:

La forma de cálculo de determinantes para matrices de orden 2 y 3 no es válido para las de orden superior, por ello debemos buscar otro método. Dada A una matriz cuadrada, se llama **menor complementario** de un elemento a_{ij} al determinante de la matriz que resulta de suprimir la fila i y la columna j. Se llama **adjunto** de a_{ij}, y se denota por A_{ij} , al menor complementario de a_{ij}, afectado de un signo que será + si *i + j* es par y - si *i + j* es impar. El determinante de una matriz coincide con la suma de los productos, productos que resultan de multiplicar los elementos de una fila o columna por sus adjuntos respectivos.

$|A| = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33}$ ó $|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} -- a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13},$$

Para calcular un determinante de orden > 3 utilizaremos las propiedades de los determinantes para conseguir ceros en una fila o columna y después aplicaremos el cálculo por adjuntos.

Por ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -96$

Ejercicio 6: Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} =$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

=

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} =$

8.4. Rango de una matriz:

Dada una matriz de orden mxn, se define **matriz menor de orden h** (menor o igual que el mínimo entre m y n) como la matriz cuadrada formada por los elementos que resultan en la intersección de h filas y h columnas, elegidas al azar en la matriz dada. Definimos **menor** como el determinante de una matriz menor. Se define **rango** de una matriz como el orden del menor no nulo de mayor orden posible. Al menor que determina el rango de la matriz se le llama **menor principal**.

<u>Propiedades del rango</u>: Las transformaciones elementales de filas o columnas que dejan invariante el rango de una matriz son:

1ª) Si se permutan dos filas o dos columnas el rango no varía.
2ª) Si se multiplica o divide un fila o columna de una matriz por un nº real no nulo, el rango no varía.
3ª) Si a una fila o columna se le suma o resta otra paralela, el rango no varía.
4ª) Podemos suprimir las filas o columnas nulas.
5ª) Podemos suprimir las filas o columnas proporcionales.
6ª) Podemos suprimir las filas o columnas combinación lineal de otras.

Al calcular el rango, en primer lugar tratamos de aplicar estas propiedades de esa forma nuestra matriz se "hará más pequeña", después buscaremos determinantes distintos de cero (empezando en el orden 1) o por el método de Gauss.

Ejemplo del cálculo de rango:

Calculemos el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 7: Calcula el rango de las siguientes matrices (usaremos tres métodos, lo primero eliminar filas o columnas utilizando las propiedades del rango, después continuamos por determinantes o por el **método de Gauss**):

a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 10 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -8 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 12 & 8 & 7 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 10 & 13 & 11 \end{pmatrix}$

Ejercicio 8: Calcula el rango de las siguientes matrices en función del valor del parámetro o parámetros. *Es conveniente "alejar" el parámetro, cambiando las filas y columnas. Podemos usar tanto el método de Gauss como por determinantes.*

A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \\ 2 & a & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $|2| \neq 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 10 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} = -57 - 2a$, a = - 57/2

$\longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 5 & a \\ 1 & 1 & -6 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 102 - 3a$, a = 102/3

Por tanto rg A = 3

B= $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, rg B = $\begin{cases} 1 & \text{si } a = 1 \\ 2 & \text{si } a = -2 \\ 3 & \text{si } a \neq 1 \text{ y } a \neq -2 \end{cases}$

C= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 4 & 11 \end{pmatrix}$, rg C = $\begin{cases} 2 & \text{si } a = 2 \\ 3 & \text{si } a \neq 2 \end{cases}$

D= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & a \end{pmatrix}$, rg D = $\begin{cases} 2 & \text{si } a = -6 \\ 3 & \text{si } a \neq -6 \end{cases}$

E= $\begin{pmatrix} -6 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & 9 & 4 \\ 0 & -7 & a & -3 \end{pmatrix}$, rg E = 3 para todo valor de a

$$F=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & t\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 3 & 6 & 9 & 12\end{pmatrix} \quad \text{rg } F = \begin{cases}1 & \text{si } t=4\\ 2 & \text{si } t\neq 4\end{cases}$$

Ejercicio 9: Determina para que valores de a son linealmente independientes los vectores $\vec{u}=(1,-1,2), \vec{v}=(2,a,-1)\ y\ \vec{w}=(a,2,a)$

8.5. Matriz Inversa :

Cuando en el tema anterior estudiamos la estructura de un conjunto de matrices cuadradas con la operación multiplicación de matrices [$M_{n\times n}$ (IR), x], vimos que dicho conjunto con la operación producto de matrices queda dotado de estructura de "SEMIGRUPO CON ELEMENTO NEUTRO" (matriz identidad); no obstante quedó pendiente por analizar la posibilidad de que exista elemento simétrico (matriz inversa) para cada matriz. Al estudiar las propiedades de los determinantes, demostramos que no todas las matrices tienen matriz inversa. Por tanto [$M_{n\times n}$ (IR), x] no alcanza la estructura de "Grupo".

Para demostrar la existencia de la matriz inversa, cuando $|A|\neq 0$, diremos cómo se construye y comprobaremos que verifica $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$. Por comodidad, vamos a trabajar con orden 3. Para construir la matriz inversa seguiremos los siguientes pasos:

Primer Paso: Se construye la **matriz adjunta** de A que se obtiene sustituyendo cada elemento de la matriz dada por el valor de su adjunto:

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}$$

Segundo Paso: Se calcula la matriz transpuesta de la matriz adjunta: $(\text{Adj})^t$

Tercer Paso: Finalmente se multiplica cada elemento de la matriz obtenida: $(\text{Adj})^t$ por el inverso del determinante de la matriz inicial (Aunque en el último paso es cuando dividimos por el determinante, lo primero que haremos es calcularlo. Sería innecesario realizar los pasos 1 y 2 si el determinante es cero):

$$\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|}\\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|}\\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|}\end{pmatrix} = A^{-1}$$

La matriz obtenida se llama **matriz inversa** de la matriz A y se denota por A^{-1}.

Ejemplo: Construye la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Primer paso } AdjA = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Segundo paso}$$

$(AdjA)^t = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 7 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ calculamos el determinante, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4$ y dividimos cada elemento por 4. Obteniendo: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 7/4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$.

Observaciones:

1) Aunque en el tercer paso dividimos por el determinante, antes de empezar a calcular la matriz inversa debemos calcular su determinante. De esa forma nos aseguramos de que existe.
2) El paso 1 y el 2 se pueden intercambiar.
3) Si queremos hacer la comprobación tan solo tenemos que multiplicar A por su inversa y comprobar que su producto es la matriz unidad.

Ejercicio 10: Calcula la inversa de las siguientes matrices, no olvides que lo primero es calcular su determinante para asegurarnos de su existencia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -1 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = 4 \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |C| = 2 \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow |D| = 1 \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la matriz inversa:

1) La inversa es única.

Demostración por reducción al absurdo: Suponemos que existen dos inversas X e Y, distintas. Por ser inversas, ambas cumplen AX = XA = I , AY = YA = I

Por tanto AX = AY multiplicando por la izqda por X obtenemos X(AX) = X(AY); (XA)X = (XA)Y; IX=IY; X=Y, absurdo puesto que eran distintas. Llegado al absurdo, concluimos que la suposición es falsa, por ello la inversa es única.

2) La inversa de A^{-1} es A. Es decir, $(A^{-1})^{-1} = A$.
3) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ Demostración: Tenemos que probar que $B^{-1}A^{-1}$ es la inversa de AB, para ello las multiplicamos, $(B^{-1}A^{-1}).(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$, es decir, $B^{-1}A^{-1}$ es la inversa de AB.

Ejercicio 11: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, obtener, si procede, $(B.A)^{-1}$.

Ejercicio 12: Hallar los valores de a para los que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa. Calcula su matriz inversa para a = 1.

Ejercicio 13: ¿Para qué valores de a no tiene inversa la matriz A? Siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcular la inversa para a = 1.

Ejercicio 14: Resuelve la siguiente ecuación matricial X.A – 2B + 3C = D siendo $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 15: Hallar una matriz X tal que $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} . X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 16: Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$

a) Estudia el rango de A según los valores de m.
b) Para m = 2, calcula la inversa de 2020A.

Ejercicio 17: Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} m & m & m \\ m & m+1 & m \\ m & m & m+2 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de m existe la inversa de la matriz A? Razona la respuesta.

b) Para m = 1, halla $\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}$

Ejercicio 18: Despeja X de las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $AX + B = C$

b) Sabiendo que $A^2 = -A^{-1}$, despeja X siendo $A^4X + B = AC$

c) $AX + (A - X)^2 = X^2 + I$

d) $AXB = C$

e) $A \cdot X + X = B$

f) $\frac{1}{2} A \cdot X + C^4 = B$

g) $3X - B^t = AX$

Ejercicio 19: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación $I - XA = 3X + B$

Ejercicio 20: a) Despeja la matriz X en la ecuación $(X + M)^2 - XM = I + X^2$ en la que M es una matriz regular de orden 3.

b) Resuelve la ecuación siendo $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 21: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

a) Indica todos los valores de m para los que A es invertible.

b) Resuelve la ecuación matricial $XA - B^t = C$ para m = 0.