

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

1. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1$ y utilizando correctamente las propiedades de los

determinantes, calcular: $\begin{vmatrix} a+3d & c+3f & b+3e \\ -d & -f & -e \\ g & i & h \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} f & e & d \\ c & b & a \\ i & h & g \end{vmatrix}$.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, con a, b, c, d números reales y A que verifica que $A \cdot A = I$ siendo I la matriz identidad y $|A|=1$. Calcular los coeficientes de A .

3. Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 1/4 & 1/8 & 1/2 \\ 1/8 & 1/2 & 1/4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 0'1 & 0'01 & 0'001 \\ \sqrt{2} & \sqrt{8} & \sqrt{32} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones siendo x la incógnita:

a) $\begin{vmatrix} x^4-6 & x \\ x^3-3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ x & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ x+2 & 4x+8 & x+2 \\ x+1 & x+1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

5. Justifica sin desarrollar que (utilizando las propiedades de los det.):

a) $\begin{vmatrix} yz & \frac{1}{x} & x \\ zx & \frac{1}{y} & y \\ xy & \frac{1}{z} & z \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} a^2 & a & bc \\ b^2 & b & ac \\ c^2 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 \\ b^3 & b^2 & 1 \\ c^3 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

6. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 8 \\ -3 & -3 & -9 & 3 & -12 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 5 & -7 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -a & -1 & a \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & 9 & 4 \\ 0 & -7 & a & -3 \end{pmatrix}$$

7. Comprueba mediante un ejemplo concreto que si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ se cumple que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
8. Calcula la matriz inversa de las siguientes matrices, haz la comprobación en cada caso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & -\cos \alpha \\ 0 & \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \end{pmatrix}$$

9. Hallar los valores de t para los que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ t & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa. Calcula su inversa para $t = 1$.

10. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$

- a) Hallar los valores de x para los que A tiene inversa.
 b) Hallar la matriz Y de orden 3 que es solución de la ecuación matricial $A \cdot Y + B = I$,

siendo I la matriz identidad, $x = 3$ para la matriz A y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$ averiguar para qué valores del parámetro m existe la inversa de A . Calcular dicha inversa para $m = 2$.

12. ¿Para qué valores del parámetro k , la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & k \end{pmatrix}$ admite inversa? Razonar

la respuesta.

13. Hallar los valores de x para los cuales la matriz A no tiene inversa: $A = \begin{pmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{pmatrix}$.

14. Calcular el valor de los parámetros a, b para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & a & 0 & b \end{pmatrix}$ tenga

rango igual a 2.

15. Resolver la ecuación matricial $A \cdot X - B + C = O$ siendo $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. Hallar una matriz X tal que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

17. Demuestra que el determinante $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 3 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ es divisible por 23. (Demostrar sin desarrollar el determinante).

18. Justifica que el conjunto de las matrices de la forma $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b, \in \mathbb{R} \right\}$ tiene estructura de cuerpo.