Las anotaciones que están en este color azul son aclaraciones, no es necesario que lo copiéis, tú decides.

Tema 9: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

9.1 Sistemas de ecuaciones lineales:

Vamos a estudiar la existencia de soluciones, nº de soluciones y cómo calcular las soluciones de un sistema lineal. Recuerda que lo primero que necesitamos es el vocabulario que vamos a utilizar. Consideremos un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas (implícitas):

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

donde x_1 ,x_2 ,..., x_n son las incógnitas, los números a_{ij} reciben el nombre de coeficientes de las incógnitas y los números b_i son los términos independientes. Llamaremos **solución** del sistema a n números reales α_1 ,α_2 ,..., α_n tales que al sustituirlos respectivamente por x_1 ,x_2 ,..., x_n se verifican las m ecuaciones.

Diremos que un sistema es **compatible** si admite al menos una solución. SC

Diremos que un sistema es **compatible determinado** si tiene una única solución. SCD

Diremos que un sistema es **compatible indeterminado** si tiene infinitas soluciones SCI

Diremos que un sistema es **incompatible** si no admite ninguna solución. SI

Si definimos A la matriz de coeficientes, X la matriz de las incógnitas y B la de los términos independientes, es decir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Un sistema de ecuaciones lineales se pueden expresar mediante matrices, $A \cdot X = B$, y por tanto $X = A^{-1} \cdot B$. Es decir, un sistema de ecuaciones lineales se puede resolver mediante la inversa de una matriz.

Es decir $\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$ equivale a $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

También se puede expresar en forma vectorial:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots\ldots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Si el sistema tiene solución lo que nos dice es que la matriz de términos independientes es una combinación lineal de las columnas de la matriz de coeficiente.

Es decir, si por ejemplo $x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots, x_n = n$, escribiremos $1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots\ldots + n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, por tanto la columna $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ es combinación lineal de las columnas de la matriz de coeficientes. De aquí deducimos fácilmente el teorema de Rouché-Frobenius que utilizaremos durante esta unidad.

9.2 Teorema de Rouché-Frobenius:

Definimos la matriz ampliada $\rightarrow A^* = A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ .. & .. & \ldots & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$, como puedes ver es la matriz de coeficientes, A, con una columna más, la de los términos independientes $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

El **teorema de Rouché-Frobenius** dice que "La condición *necesaria* y *suficiente* para que un sistema de ecuaciones lineales con "m" ecuaciones y "n" incógnitas sea compatible es que el rango de la matriz de coeficientes sea igual que el rango de la matriz ampliada". Es decir un sistema es compatible $\Longleftrightarrow$ r(A) = r(A*)

- ¿Qué significa condición *necesaria* y *suficiente*? Quiere decir que si es compatible entonces r(A) = r(A*), pero además se cumple lo contrario, es decir, si r(A) = r(A*) entonces el sistema es compatible.
- $\Longleftrightarrow$ Quiere decir que podemos ir en los dos sentidos y se lee "si y solo si"

En esta unidad vamos a discutir y resolver sistemas de ecuaciones lineales, muy importante para la geometría. Casi todos los sistemas que vamos a resolver tienen 3 incógnitas y los métodos que vamos a aprender nos parecen innecesarios, pero imagina un sistema con 20 incógnitas. Vamos a ver las observaciones del teorema que nos dice cuando es SCD, SCI o SI, para ello tenemos que calcular rango con el **método de Gauss**, una vez estudiado el rango, esa misma matriz transformada nos permite calcular la solución o soluciones:

Observaciones:

1. Si r(A) = r(A*) < n (nº de incógnitas) es un SCI usaremos la abreviatura. Tendremos un sistema de r ecuaciones y n incógnitas, n – r incógnitas son libres. Por ejemplo si tenemos 5 (n) incógnitas y 3 (r) ecuaciones, tendremos 5 – 3 = 2 incógnitas libres, por tanto pasamos dos incógnitas a la derecha con el término independiente y calculamos, para entenderlo mejor aquí te dejo un ejemplo:

Ejemplo 1: Discute y resuelve el siguiente sistema $\left.\begin{array}{l} x - 2y + z - 3t = -4 \\ x + 2y + z + 3t = 4 \\ 2x - 4y + 2z - 6t = -8 \\ 2x + 2z = 0 \end{array}\right\}$ Por el teorema de Rouché-Frobenius, para saber si tiene solución tenemos que calcular el rango de A y A* que son dos matrices muy parecidas, calculamos el rango de A* y tapando la última columna tendremos el rgA. Calculemos gA* = rg $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & -6 & -8 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ = ($F_2 = 2F_1$) =

rg $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ = rg $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ → rgA = rgA* = 2 < 4 (nº incógnitas)

por tanto es un SCI → 4 – 2 = 2 incógnitas libres, elegimos las de la derecha, z y t volvemos al sistema de ecuaciones, pero será fácil de resolver→

$\left.\begin{array}{l} x - 2y + z - 3t = -4 \\ 4y + 6t = 8 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x - 2y = -4 - z + 3t \\ 4y = 8 - 6t \end{array}\right\}$ cambiamos las incógnitas libres por m y n números reales, z = m y t = n $\left.\begin{array}{r} x - 2y = -4 - m + 3n \\ 4y = 8 - 6n \end{array}\right\}$ → Resolvemos como si m y n fueran números →

$y = \frac{8-6n}{4}$ →por tanto $x - 2\frac{8-6n}{4} = -4 - m + 3n$ → $4x - 16 + 12n = -16 - 4m + 12n$ → $4x = -4m$ →
x = - m soluciones del sistema → x = - m, $y = \frac{8-6n}{4}$, z = m, t = n con $m,n \in \Re$

2. Si r(A) = r(A*) = n (nº de incógnitas) es un SCD

Ejemplo 2: Discute y resuelve el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x - y - 2z = -3 \\ -x + 2y + z = 0 \\ 4x + 5y + z = 2 \end{array}\right\}$ en primer lugar vamos a discutirlo (saber si tiene o no solución) para ello calculamos el rango de A y de A*, si te das cuenta podemos calcular los dos rangos al mismo tiempo → rgA* = $rg\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 13 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$
$rg\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -15 & -45 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow$ rgA* = rgA = 3 ⇒ por el Th de RF es un SCD, pasemos a resolverlo, si te das cuenta ya lo tienes, solo falta pasarlo a forma de sistema $\left.\begin{array}{r} -x + 2y + z = 0 \\ 3y = -3 \\ -15z = -45 \end{array}\right\}$ Si miras la última fila, la z está sola y puedes calcularla, sustituyes en la segunda fila y calculas y, y así sucesivamente: z = -45/ -15 = 3 ⇒ y = -3/3 = - 1 ⇒ -x - 2 +3 = 0 → x = 1, solución x = 1 y = -1 y z = 3

3. Si $r(A) \neq r(A^*)$ el sistema es **incompatible SI**.

Ejemplo 3: Discute y resuelve el siguiente sistema $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ 3y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x - y - z = 4 \end{array}\right\}$

$rgA^* = rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

$= rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 4$ → rgA* = 4 y rgA = 3 → SI

4. Los sistemas **homogéneos** son de la forma $\left.\begin{matrix} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}\,x_n &= 0 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}\,x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots & \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}\,x_n &= 0 \end{matrix}\right\}$

Es decir, la columna de los términos independientes son todos ceros. Por lo que un sistema homogéneo cumple siempre el teorema de Rouché-Frobenius y por tanto **un sistema homogéneo siempre es compatible** y siempre tiene como solución $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, …, $x_n = 0$, llamada **solución trivial**. Además:

4.1 Si $r(A) = n$ (número de incógnitas) será compatible determinado, es decir solo admite una única solución que será la trivial.

Ejemplo 4: Discute y resuelve el siguiente sistema: $\left.\begin{matrix} 2x - y - 2z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ 4x + 5y + z = 0 \end{matrix}\right\}$, sabemos que rgA = rgA* por tanto es SC pero necesitamos saber si rgA es igual o menor al nº de incógnitas rgA* = $rg\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 5 & 0 \end{pmatrix} =$ $rg\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 0 \end{pmatrix} = 3$ → rgA* = rgA = 3 = nº incógnitas $\Rightarrow$ SCD y la única solución es la trivial x = 0, y = 0 z = 0

4.2 Si $r(A) < n$ será un sistema compatible indeterminado, es decir con ilimitadas soluciones que obtendremos como ya vimos en el apartado anterior.

Ejemplo 5: Discute y resuelve el siguiente sistema $\left.\begin{matrix} x - 2y + z - 3t = 0 \\ x + 2y + z + 3t = 0 \\ 2x - 4y + 2z - 6t = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{matrix}\right\}$ Ya sabemos que es un SC por ser homogéneo (todos los términos independientes son nulos), para saber si es SCD o SCI debemos estudiar el rango de A → $rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ = ($F_2 = 2F_1$) = $rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ →rgA = rgA* = 2 < 4 (nº incógnitas) por tanto es un SCI → 4 – 2 = 2 incógnitas libres, elegimos las de la derecha, z y t volvemos al sistema de ecuaciones, pero será fácil de resolver→

$\left.\begin{array}{r} x-2y+z-3t=0 \\ 4y+6t=0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x-2y=-z+3t \\ 4y=-6t \end{array}\right\}$ cambiamos las incógnitas libres por m y n números reales, z = m y t = n $\left.\begin{array}{r} x-2y=-m+3n \\ 4y=-6n \end{array}\right\}$ → Resolvemos como si m y n fueran números →

$y=\frac{-6n}{4}$ → $y=\frac{-3n}{2}$ por tanto $x-2\frac{-3n}{2}=-m+3n$ → $2x+6n=-2m+6n$ → $2x=-2m$ →

x = - m soluciones del sistema → x = - m, $y=\frac{-3n}{2}$, z = m, t = n con $m,n \in \Re$

Ejercicio 1: Estudia la compatibilidad de los siguientes sistemas lineales utilizando el cálculo de rango por Gauss:

a) $\left.\begin{array}{r} x-y-3z=0 \\ 2x+2y+z=1 \\ x+y+4z=1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x-2y-z=8 \\ 3x+y+2z=-1 \\ 2x+3y+3z=0 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} 2x+3y-z=0 \\ x-y+2z=0 \\ 3x+3z=0 \end{array}\right\}$

9.3 Resolución de sistemas de ecuaciones.

Para resolver tenemos tres métodos

- Mediante matriz inversa ($|A| \neq 0$) lo vimos en el tema anterior
- Método de Gauss (lo vimos en el tema anterior y en los ejemplos anteriores)
- Regla de Cramer ($|A| \neq 0$) (sigue una fórmula que veremos a continuación)

Los tres métodos son importantes porque en el examen nos pueden pedir lo hagamos por un método concreto.

a) Si la matriz de coeficientes A es una matriz cuadrada invertible ($|A| \neq 0$) podemos resolver el sistema lineal utilizando la **matriz inversa**.

Ejercicio 2: Resuelve el siguiente sistema lineal de forma matricial:

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ x+2y-z=2 \end{array}\right\}$$

Recuerda este sistema se convierte en la siguiente ecuación matricial AX = B, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, despejando de la ecuación tenemos $X = A^{-1} B$, calcula X.

b) **Método de Gauss** consiste, como ya sabemos por las matrices, en hacer cero bajo "la diagonal principal", **utilizaremos las propiedades del rango salvo que trabajaremos por filas y no por columnas**. Muchos ejercicios nos pide que discutamos el sistema y después resolverlo, esa es la ventaja del método de Gauss, nos permite discutir y al mismo tiempo resolver.

c) **Regla de Cramer**: Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es **un sistema de Cramer** si tiene el mismo número de incógnitas que de ecuaciones y la matriz de coeficientes $A=(a_{ij})$ es regular ($|A| \neq 0$), es decir, si rgA = rgA* = nº incógnitas. La regla de Cramer nos da la forma de calcular las incógnitas mediante determinantes, para explicarlo voy a utilizar un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas: Sea el sistema $\left.\begin{matrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{matrix}\right\}$ con rgA = 3 $\Rightarrow$

$$|A| \neq 0 \text{ entonces } x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{33} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Observa que en x cambio la primera columna por la columna de los términos independientes, en y (la segunda incógnita) cambio la segunda columna por la columna de los términos independientes, y así sucesivamente.

Ejercicio 3. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, utilizando diferentes métodos:

a) $\left.\begin{matrix} x + 3y - z = 4 \\ -2x - 4y + 3z = 3 \\ 3x + 5y - z = -6 \\ 2x + 4y + z = 1 \end{matrix}\right\}$ b) $\left.\begin{matrix} 2x + 3y - z = 5 \\ x - y + 3z = 0 \\ 3x + 7y - 5z = 1 \end{matrix}\right\}$ c) $\left.\begin{matrix} 2x + 3y - z + t = 5 \\ x - y + 2t = -1 \\ 2y - 3z - 2t = 0 \\ x + 3y - 6z - 2t = -1 \end{matrix}\right\}$

d) $\left.\begin{matrix} x - y + z = 5 \\ 2x - 2y - 3z = 5 \\ 4x - 4y - z = 15 \end{matrix}\right\}$ e) $\left.\begin{matrix} 2x + y - z + t = 0 \\ x - y - z - 2t = 0 \\ x - 2y + 2z - t = 0 \\ x + y - 7z - 4t = 0 \end{matrix}\right\}$ f) $\left.\begin{matrix} 2x - 3y + z - t = 1 \\ x + z + t = 0 \\ x + 6y + 7t + 3z = -2 \\ x - 3y - 2t = 1 \\ 3y + z + 3t = -1 \end{matrix}\right\}$

$$\text{g)}\quad \left.\begin{aligned} x+y-z&=-4\\ 3y+2x+z&=9\\ -x+2y-2z&=-5 \end{aligned}\right\} \qquad \text{h)}\quad \left.\begin{aligned} 2x+y+z&=7\\ x+z&=4\\ 3x-2y+z&=2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{i)}\quad \left.\begin{aligned} x+2y-z&=1\\ 2x-y+z&=0\\ 4x+3y-z&=2 \end{aligned}\right\}$$

9.4 Discusión de sistemas en función de un parámetro.

Veamos mediante un ejemplo en qué consiste la discusión de un sistema en función de un parámetro. Sea el sistema:

$$\left.\begin{aligned} mx-y+z&=1\\ 2x+y-z&=0\\ x+2y-mz&=-1 \end{aligned}\right\}$$

Observa que para cada valor que demos al parámetro "m" obtenemos un sistema distinto. Se trata de averiguar para qué valores de "m" el sistema es compatible y para qué valores es incompatible. Así mismo, dentro de los casos de compatibilidad hay que especificar cuándo queda un sistema determinado y cuando indeterminado. Para tal discusión nos serviremos del teorema de Rouché-Frobenius.

Ejercicio 4: Discute los siguientes sistemas y resuelve cuando sea compatible:

$$\text{a)}\quad \left.\begin{aligned} x-y+2z&=2\\ 2x+y+3z&=2\\ 5x+y+az&=6 \end{aligned}\right\} \qquad \text{b)}\quad \left.\begin{aligned} x+y+(m-2)z&=1\\ mx+3y+mz&=2 \end{aligned}\right\}$$

$$\text{c)}\quad \left.\begin{aligned} -x+2y-2z&=2\\ 2x+y+z&=m\\ x+3y-z&=m^2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{d)}\quad \left.\begin{aligned} x+y&=1\\ ky+z&=0\\ x+(k+1)y+kz&=k+1 \end{aligned}\right\}$$ Calcular k para que en la solución se tenga que z = 2

$$\text{e)}\quad \left.\begin{aligned} \lambda x+y+z&=\lambda+2\\ 2x-\lambda y+z&=2\\ x-y+\lambda z&=\lambda \end{aligned}\right\} \qquad \text{f)}\quad \left\{\begin{aligned} x+my+z&=4\\ -mx+y+z&=1\\ x+y+z&=m+3 \end{aligned}\right.$$

$$\text{g)}\quad \left.\begin{aligned} x+y&=m+1\\ x+my+z&=1\\ mx+y-z&=m \end{aligned}\right\} \qquad \text{h)}\quad \left.\begin{aligned} x+\lambda y+z&=4\\ x+3y+z&=5\\ \lambda x+y+z&=4 \end{aligned}\right\}$$

i) $\left.\begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ mx \quad + 2z = 0 \\ my - z = m \end{array}\right\}$ para m = 0 es un SCI donde la z no es la incógnita libre.

Ejercicio 5: Considera el sistema de ecuaciones dado por AX = B siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ y\, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Discute el sistema según los valores de m.
b) Para m = - 2, ¿existe alguna solución con z = 0? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Ejercicio 6: Calcula, en grados, los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

Ejercicio 7: En una cafetería, tres cafés, una tostada y dos zumos de naranja cuestan 7.50 €, Cuatro cafés, una tostada y un zumo de naranja cuestan 7.20 €.
a) Calcula, de forma razonada, el precio total de dos cafés, una tostada y tres zumos de naranja.
b) ¿El precio de un zumo de naranja podría ser de 2 €? Razona la respuesta.

Ejercicio 8: Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros.
a) Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25 euros ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos? Razona la respuesta.
b) Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?

Ejercicio 9: De los datos recabados en un informe sobre los beneficios obtenidos por las empresas A, B y C el pasado año, se desprende lo siguiente:
• La empresa B obtiene el mismo beneficio que las empresas A y C juntas.
• El beneficio de la empresa A es la media aritmética del de las otras dos.
a) Determina si se puede hallar el beneficio de cada empresa sabiendo que A ha obtenido el doble que C.
b) Calcula el beneficio de cada empresa sabiendo que entre las tres han obtenido 210 millones de euros.

Ejercicio 10: Un país ha sufrido un devastador huracán, Un estado vecino quiere proporcionar ayuda urgente con un presupuesto de 120.350 € consistente en el envío por avión de medicamentos, ropa y agua. El volumen y peso máximo que soporta el avión es de 280 m^3 y 24.375 kg respectivamente. La tabla siguiente muestra el volumen y peso de los contenedores de los tres productos, así como su precio. Calcula cuántos de ellos se pueden enviar como máximo.

	Volumen m^3	Peso Kg	Precio €
Medicinas	0,08	5	250
Ropa	1	30	300
Agua	0,1	100	10