Lo que encontréis en azul son explicaciones, tú decides si copiarlo.

TEMA 10: VECTORES EN EL ESPACIO.

10.1 Vectores fijos y libres en el espacio vectorial.

Se llama **vector fijo** de origen A y extremo B al segmento orientado de origen en el punto A y extremo en el punto B. Lo designaremos por $\vec{AB}$. Un vector fijo, no nulo, $\vec{AB}$ en el espacio queda caracterizado por un par de puntos A y B, o bien por su módulo, dirección y sentido junto con el origen, siendo:

1) Módulo del vector fijo $\vec{AB}$ es la longitud del segmento de extremos los puntos A y B. Y se denota por $|\vec{AB}|$. *El módulo en la fuerza representa la intensidad de la fuerza.*

2) Dirección del vector fijo $\vec{AB}$ a la dirección de la recta que pasa por A y B. *No es lo mismo empujar una mesa por su lateral que por una esquina. No es lo mismo ir de Cádiz a Málaga que de Cádiz a Sevilla.*

3) Sentido del vector fijo $\vec{AB}$ al sentido de recorrido de la recta AB cuando nos trasladamos desde A hacia B. *No es lo mismo trasladar la mesa de la dcha. hacia la izquierda que al revés.* Solo podemos hablar de sentidos iguales o contrarios si ambos vectores tienen la misma dirección. Cada dirección tiene dos sentidos opuestos.

Al vector cuyo origen coincide con su extremo se le llama vector nulo $\vec{AA}$. Al vector unitario, se dice que un vector es **unitario** si su módulo es 1. Dos vectores son paralelos, sabiendo que dos vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ son **paralelos** si tienen la misma dirección, y se denota por $\vec{AB} // \vec{CD}$. Dos vectores perpendiculares, sabiendo que dos vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ son **ortogonales o perpendiculares** si las rectas en las que se apoyan son perpendiculares, y se denota por $\vec{AB} \perp \vec{CD}$.

Dos vectores fijos $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ son **equipolentes** si ambos vectores son nulos o si tienen el mismo módulo, dirección y sentido. Y se denota por $\vec{AB} \approx \vec{CD}$.

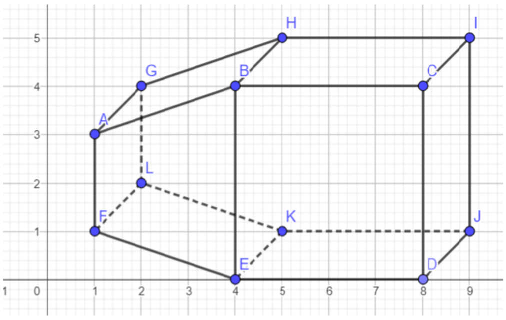
<u>Geométricamente, quiere decir que si ambos no están en la misma recta, uniendo A y C, B y D se obtiene un paralelogramo.</u>

Dado un vector fijo $\vec{AB}$ podemos formar un conjunto con todos los vectores fijos equipolentes a él, a dicho conjunto se le llama **vector libre**, se denotan por letras minúsculas $\vec{u}$, $\vec{v}$,.. , son vectores que se pueden trasladar.

Al conjunto de los vectores libres se denota por V^3.

El vector libre **nulo** tiene módulo 0 y carece de dirección y sentido, se denota por $\vec{o}$.
Si $\vec{AB}$ es un vector libre del espacio y O un punto cualquiera del espacio, existe un *único* representante de este vector que tiene su origen en el punto O.

Ejercicio 1: Observa la figura:



a) Indica un vector equipolente a FL y a FE
b) Compara el módulo, dirección y sentido de AF y BE.
c) Indica dos vectores con el mismo módulo u dirección pero con diferente sentido a EJ

10.2 Operaciones con vectores libres. Bases en el espacio vectorial.

1) Adición (suma) de vectores.

Busca y dibuja un ejemplo de suma de vectores.
La suma de vectores es una operación interna y verifica las siguientes propiedades:
1.- Asociativa: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
2.- El elemento neutro de la suma es el vector nulo. $\vec{a} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{a} = \vec{a}$
3.- El vector opuesto al vector $\vec{a}$ es otro vector de igual dirección y módulo, pero de sentido opuesto, se denota por $-\vec{a}$. $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{o}$
4.- Conmutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{b}$.

Por ser la operación suma de vectores una operación interna y verificar las propiedades anteriormente descritas (asociativa, conmutativa, elemento neutro y elemento opuesto) se dice que $(V^3, +)$ es un grupo conmutativo.

2) Producto de un número real por un vector.

Dado $\vec{a}$ vector libre, no nulo, y $K \in IR$, $K \neq 0$ se llama producto de un nº real por un vector al vector cuyo módulo es $|k| \cdot |\vec{a}|$, la misma dirección que $\vec{a}$, sentido igual a $\vec{a}$ si

$k > 0$ y opuesto a $\vec{a}$ si $k < 0$. Se denota por $k\vec{a}$. Si k o $\vec{a}$ son nulos entonces: $0 \cdot \vec{a} = \vec{o}$ $k \cdot \vec{o} = \vec{o}$.
El producto por un escalar es una operación externa y verifica las siguientes propiedades:

5.- Distributiva respecto de la suma de vectores: $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$
6.- Distributiva respecto de la suma de escalares: $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$
7.- Asociativa mixta: $(k.m)\vec{a} = k(m\vec{a}) = m(k\vec{a})$
8.- $1.\vec{a} = \vec{a}$

Si en un conjunto, en nuestro caso V^3, definimos una operación interna (+) y otra externa (·IR) y se verifican las 8 propiedades anteriormente mencionadas, se dice que dicho conjunto tiene estructura de un espacio vectorial, es decir, $(V^3, +, \cdot IR)$ tiene estructura de **espacio vectorial** y a sus elementos se les llama **vectores**.

Decimos que un vector $\vec{u}$, no nulo, es **combinación lineal** de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ del espacio vectorial, si existen $a_1, a_2, ..., a_n$ números reales, no todos nulos, tales que $\vec{u} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + ... + a_n\vec{u}_n$. También decimos $\vec{u}$ que **depende linealmente** de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$.
Decimos que el conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ es **linealmente dependiente** (l.d.) si al menos uno de ellos es combinación lineal de los demás.

Decimos que el conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ es **linealmente independiente** (l.i.) si ninguno de ellos depende de los demás.

Debemos tener en cuenta sobre vectores li o ld:

1) Un vector no nulo es l.i.
2) Dos vectores con distinta dirección son l.i.
3) Dos vectores con la misma dirección son l.d.
4) Tres vectores pueden ser ld o li, es más difícil de ver, cuando veamos las coordenadas veremos que simplemente tenemos que hacer un determinante.
5) Cualquier conjunto de 4 ó más vectores son l.d.

También hemos visto que:

1) Un vector no nulo genera vectores con la misma dirección.
2) Dos vectores l.i. generan un plano.
3) Tres vectores l.i. generan el espacio V^3.

Un conjunto de vectores $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es una **base** del espacio vectorial si es un conjunto **l.i.** y cualquier vector $\vec{u}$ del espacio se puede expresar como combinación lineal de ellos (**sistema generador**). Cualquier base del espacio V^3 tiene 3 vectores, es decir, su dimensión es 3.

Una base se dice que es **ortogonal** si los vectores son ortogonales (perpendiculares) dos a dos.
Una base se dice que es **normada** si todos los vectores son unitarios (módulo 1).

La **base canónica** es una base ortonormal, a sus vectores se les nombra B = {$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$} siendo $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ unitarios y ortogonales dos a dos.

Sea $\vec{u}$ un vector, no nulo, del espacio, puesto que B = {$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$} es base, podemos afirmar que existen x, y, z n^{os} reales, no todos nulos tales que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Se dice que (x, y, z) son las **coordenadas cartesianas** del vector $\vec{u}$. Es decir, si $\vec{u}$ = (2, 3, -1) respecto de la base canónica entonces $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

En el plano, en el curso pasado, teníamos $\vec{i}$ = (1, 0), $\vec{j}$ = (0, 1). En el espacio, las coordenadas de los vectores de la base canónica son $\vec{i}$ = (1,0,0), $\vec{j}$ = (0,1,0), $\vec{k}$ = (0,0,1).

Ejercicio 2: Dados los vectores $\vec{u}$ = (2, 3, -1), $\vec{v}$= (-3, 2, 3) y $\vec{w}$ = (1, 1, -2), calcula las coordenadas de los vectores $2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}$ y $\frac{1}{2}\vec{u} - 4\vec{v} - 1/5\,\vec{w}$

Ejercicio 3: Decide si los siguientes tríos de vectores son linealmente independientes o dependientes. ¿Cuáles forman base:

a) $\vec{u}$ = (1, 1, -1), $\vec{v}$ = (1, -1, 1) y $\vec{w}$ = (-1, 1, 1)
b) $\vec{u}$ = (1, 2, -3), $\vec{v}$ = (2, - 1, 3) y $\vec{w}$ = (5, 0, 3)
c) $\vec{u}$ = (1/2, -3/4, -2), $\vec{v}$ = (0, 1/2, -2) y $\vec{w}$ = (1, 0, -10)

Ejercicio 4: Calcula la relación que ha de existir entre a y b para que los vectores $\vec{u}$ = (a, -2, b), $\vec{v}$ = (3, 2, a) y $\vec{w}$ = (2, 4, 0) sean linealmente independientes.

Ejercicio 5: Comprueba en cada apartado si los vectores forman base, en caso afirmativo expresa el vector $\vec{a}$ = (-12, -30, 4) como combinación lineal de la base:

a) $\vec{u}$ = (1, 0, -2), $\vec{v}$ = (-1, 3, -2) y $\vec{w}$ = (-5, -9, 2)
b) $\vec{u}$ = (-2, 3, -1), $\vec{v}$ = (1, -1, 2) y $\vec{w}$ = (-1, 2, 1)

Ejercicio 6: Resuelve los siguientes apartados:

a) Comprueba que los vectores $\vec{u}$ = (1, -3, 2) y $\vec{v}$ = (2, -1, -2) son linealmente independientes.
b) Indica un vector $\vec{w}$, para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes. ¿Forman base?
c) Indica un vector $\vec{w}$, para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes. ¿Forman base?

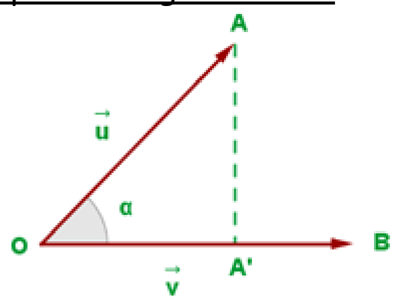
10.3 Producto escalar. Módulo y ángulo de vectores.

El **producto escalar** de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un número real que se designa $\vec{u} \bullet \vec{v}$ y se define del modo siguiente:

$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \bullet |\vec{v}| \bullet \cos(\widehat{\vec{u}\vec{v}})$ si $\vec{u}, \vec{v} \neq$ vector nulo.

$\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$ si al menos uno de ellos es el vector nulo.

Interpretación geométrica.



$\cos \alpha = \dfrac{\text{Proy. de } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v}}{|\vec{u}|}$, Proy. de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ = $|\vec{u}| \cdot \cos \alpha$

Con lo cual el producto escalar mide longitud.

Propiedades del producto escalar.

1.- $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \Rightarrow \vec{u} \bullet \vec{u} \geq 0$

2.- Conmutativa $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$

3.- Es homogénea $k(\vec{u} \bullet \vec{v}) = (k\vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u}\,(k\vec{v})$

4.- Distributiva producto escalar respecto suma de vectores $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$

Expresión analítica del producto escalar: $\vec{u} \bullet \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ siendo $\vec{u}$ = (x,y,z) y $\vec{v}$ = (x´,y´,z´).

Al conjunto de vectores con el producto escalar se le llama **espacio vectorial euclídeo** al par (V^3, .), lo importante es que en él podemos medir, por ejemplo gracias al producto escalar podemos calcular el módulo de un vector o el ángulo entre dos vectores.

OBSERVACIONES:

a) Módulo de un vector: $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

b) Ángulo de dos vectores: $\cos(\widehat{\vec{u}\vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| \bullet |\vec{v}|}$, varía de 0° a 180°.

c) Si dos vectores son perpendiculares el producto escalar es cero.

Ejercicio 7: (70) En una base ortonormal tenemos que $\vec{u}$ = (1, -1, 2) y $\vec{v}$ = (-1, 2, 3)

a) $\vec{u} \bullet \vec{v}$ b) $|\vec{u}|, |\vec{v}|$

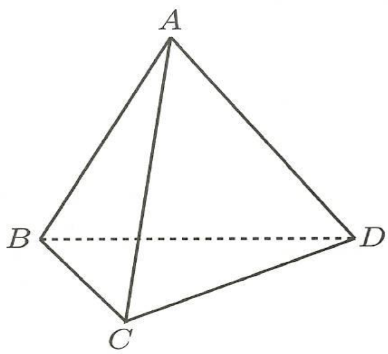
c) ángulo que forman. d) La medida de la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

Ejercicio 8: (72) Halla el valor o valores de a para que sean perpendiculares los vectores $\vec{u}$ = (3, -2, 5a) y $\vec{v}$ = (1, -1, -a).

Ejercicio 9: (74) Calcula las coordenadas de todos los vectores que lleven la misma dirección que $\vec{a}$ = (1, 2,-1) y tenga por módulo 15 unidades de longitud.

Ejercicio 10: ¿Cómo es el producto escalar de dos vectores con la misma dirección? ¿Se verifican los productos notables?

Ejercicio 11: (69) Se considera el tetraedro ABCD de la figura de arista a:



a) Calcula los productos escalares $\vec{AB}.\vec{AC}$ y $\vec{AB}.\vec{AD}$.

b) Calcula $\vec{AB}.\vec{CD}$, ¿Qué puedes concluir?

Ejercicio 12: (80) Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ verifican que $|\vec{u}| = 15$, $|\vec{v}| = 12$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$ =25.

a) Calcula el producto escalar $\vec{u}$. $\vec{v}$, ¿De qué tipo es el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$?.

b) Calcula el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) Calcula el ángulo que forma $\vec{u}$ - $\vec{v}$ con el vector $\vec{v}$.

RECUERDA EL PRODUCTO ESCALAR ES UN <u>NÚMERO</u>

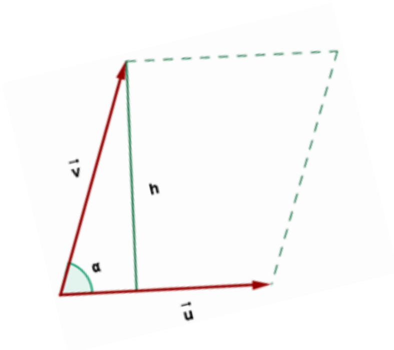
10.4 Producto vectorial.

El **producto vectorial** de dos vectores libres de V^3, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es otro <u>vector</u> cuyo módulo es $|\vec{u}| \bullet |\vec{v}| \bullet \operatorname{sen}(\widehat{\vec{u}\vec{v}})$, dirección perpendicular al plano formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y sentido el del avance de un sacacorchos que gira siguiendo el camino más corto de $\vec{u}$ a $\vec{v}$, si lo hace en sentido contrario a las agujas del reloj, el producto vectorial irá hacia arriba y si lo hace en el mismo sentido irá hacia abajo. Se denota por $\vec{u}$ x $\vec{v}$.

Observaciones:

1) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o}$ ó $\vec{v} = \vec{o}$ ó $\vec{u} = \lambda \vec{v}$
2) $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ $\quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ $\quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

Interpretación Geométrica.



$$A = b \times h = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen}(\widehat{\vec{u} \bullet \vec{v}}) \Rightarrow$$

Área del paralelogramo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el módulo del producto vectorial de ambos.

Propiedades.
1.- Anticonmutativa: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
2.- Homogénea: $(k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v}) = k(\vec{u} \times \vec{v})$
3.- Distributiva $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

Expresión analítica. $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$ siendo $\vec{u} = (x, y, z)$ y $\vec{v} = (x', y', z')$

Ejercicio 13: (83) Calcula el producto vectorial de los vectores $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$. Comprueba que el vector resultado es perpendicular a ambos.

Ejercicio 14: Sea $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0,1, 0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$. Realiza los distintos productos vectoriales de los tres vectores y comprueba la observación 2 del producto vectorial.

Ejercicio 15: (89) Calcula todos los vectores unitarios que sean perpendiculares a los vectores $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ y $\vec{v} = -4\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$.

Ejercicio 16: (90 a) Calcula el área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ y $\vec{v} = \vec{j} - \vec{k}$. ¿Y el área del triángulo determinado por ambos?

Ejercicio 17.- Simplificar las expresiones:
a) $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$ $\qquad$ b) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$

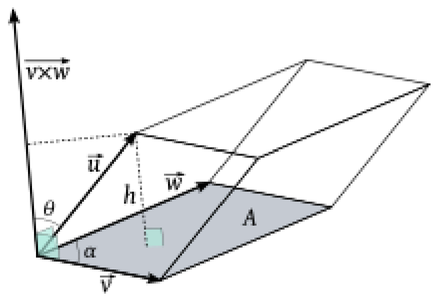
RECUERDA EL PRODUCTO VECTORIAL ES UN VECTOR

Pequeño resumen, el producto escalar mide longitud, el producto vectorial mide áreas, ¿quién mide el volumen? el producto mixto, este producto mezcla el producto escalar y el vectorial, y se trata de un número.

10.5 Producto Mixto.

El producto mixto de tres vectores libres del espacio $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es un número real que se designa por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ y se obtiene de la siguiente forma $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$, es decir, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

<u>Interpretación Geométrica.</u>



$|\vec{v} \times \vec{w}|$ es el área de la base.

$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = V_{paralelepípedo}$, ojo, valor absoluto.

<u>Expresión analítica del producto mixto.</u> Siendo $\vec{u} = (x, y, z)$, $\vec{v} = (x', y', z')$ y $\vec{w} = (x'', y'', z'')$ → $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$

<u>Propiedades.</u>

1.- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$

2.- $[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

3.- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

4.- $[a\vec{u}, b\vec{v}, c\vec{w}] = abc\,[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

5.- $[\vec{u} + \vec{u}\,', \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}\,', \vec{v}, \vec{w}]$

El producto mixto es un determinante y por tanto cumple las propiedades de los determinantes que son las propiedades que tienes arriba.

Ejercicio 18: (94 a) Calcula el producto mixto, por definición (es decir, haz el producto vectorial y después el escalar) y mediante la expresión analítica (es decir, con el determinante), de $\vec{u}=(2,4,-5)$, $\vec{v}=(-2,-2,5)$ y $\vec{w}=(-2,4,6)$.

Ejercicio 19: Calcula $[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$

Ejercicio 20: Calcula el producto mixto de los vectores $\vec{u} = (2, 4, -5)$, $\vec{v} = (-2, -2, 5)$ y $\vec{w} = (3, -8, 0)$.

Ejercicio 21: (97 a) Hallar el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores (aristas) $\vec{u} = (0, 2, -2)$, $\vec{v} = (-3, 0, -1)$ y $\vec{w} = (3, -8, 0)$. ¿Cuál es el volumen del tetraedro formado por los tres vectores? Si no lo tienes claro, mira este vídeo https://www.youtube.com/watch?v=iC47ViAeHeg

Ejercicio 22: Calcula los valores de a para que el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{u} = (1, a, 5)$, $\vec{v} = (8, 1, -9)$ y $\vec{w} = (-a, 3, 0)$ valga 173 u^3.