Unidad 1: Números y álgebra

1. Números reales.

1.1 Números reales

El conjunto de los números reales está formado por los números racionales (aquellos que pueden expresarse en forma de fracción) y los irracionales.

Recuerda que cualquier número decimal exacto, periódico puro o mixto puede expresarse en forma de fracción (y por tanto son números racionales).

Números reales (**R**)

- Racionales (**Q**)
  - Enteros (**Z**): -3, -23, 0
    - Naturales (**N**): 1, 2, $\sqrt{9}$, 30, $\frac{8}{2}$
  - $\frac{7}{5}$, $1{,}5$, $4{,}\hat{6}$, $9{,}1\widehat{67}$
- Irracionales (**I**): $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{12}$, π, e, ϕ, $log\ 89$, $ln\ 77$, $4{,}89763549274533283\ldots$

Decimal exacto

$$16{,}25 = \frac{1625}{100} = \frac{65}{4}$$

1º Paso: Colocamos el número sin coma en el numerador.

2ºPaso: Colocamos un 1 seguido de tantos 0 como decimales haya en el denominador.

Decimal periódico puro

$$1{,}\widehat{23} = \frac{123-1}{99} = \frac{122}{99}$$

1º Paso: Colocamos el número sin coma en el numerador y le restamos lo que queda fuera del periodo (la parte entera).

2ºPaso: Colocamos en el denominador tantos 9 como decimales tenga el periodo.

Decimal periódico mixto

$$1{,}4\widehat{23} = \frac{1423-14}{990} = \frac{1409}{990}$$

1º Paso: Colocamos el número sin coma en el numerador y le restamos lo que queda fuera del periodo.

2ºPaso: Colocamos en el denominador tantos 9 como decimales tenga el periodo seguidos de tantos 0 como decimales tenga el anteperiodo.

$1{,}4\widehat{23}$

Parte entera **Anteperiodo** **Periodo**

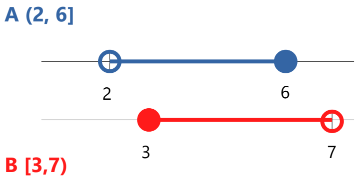
1.2 Intervalos

Un **intervalo** de extremos a y b es el conjunto e todos los números reales comprendidos entre a y b.

Ejemplos:

Todos los números mayores que 2 y menores o iguales que 6.		$2 < x \leq 6$	$(2, 6]$	Intervalo semiabierto.
Todos los números mayores o iguales que 2 y menores o iguales que 6.		$2 \leq x \leq 6$	$[2, 6]$	Intervalo cerrado.
Todos los números mayores que 2 y menores que 6.		$2 < x < 6$	$(2, 6)$	Intervalo abierto.
Todos los números mayores que 2.		$2 < x$	$(2, +\infty)$	Semirrecta abierta.
Todos los números menores o iguales que 2.		$x \leq 2$	$(-\infty, 2]$	Semirrecta cerrada.

Dados dos o más intervalos podemos hallar su unión (se unen) o su intersección (seleccionamos solo los números que tienen en común).



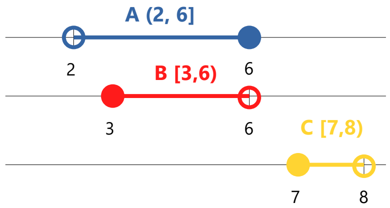
A U B = (2,7)

A ∩ B = [3,6]

Unión: Para la unión cogemos todos los puntos que hay en los dos intervalos. El A tiene tiene todos los puntos desde el 2 hasta el 6 incluido, y el B todos los puntos del 3 al 7.

Intersección: Para la intersección cogemos tan solo los puntos comunes.

Recuerda: Si hay un paréntesis significa que ese número no está. Si hay un corchete significa que ese número si está.



A U B = (2,6]

A ∩ B = [3,6)

A U B U C = (2,6] U [7,8)

A ∩ B ∩ C = Ø

Podemos realizar la unión y la intersección de varios intervalos a la vez. Si los intervalos están separados se coloca la U de unión entre ellos.
Si no tienen ningún punto en común se coloca el signo del conjunto vacío.

Puedes ver varios ejemplos en el siguiente vídeo.

1.3 Propiedades de los números

suma	Conmutativa	$a+b=b+a$
	Asociativa	$a+(b+c)=(a+b)+c$
	Elemento neutro (0)	$a+0=a$
	Elemento opuesto (-a)	$a+(-a)=0$
producto	Conmutativa	$a\cdot b=b\cdot a$
	Asociativa	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
	Elemento unidad (1)	$a\cdot 1=1$
	Inverso excepto para el neutro de la suma (1/a)	$\frac{1}{a}\cdot a=1$
	Distributiva respecto de la suma	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
potencia	Potencia de un producto	$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$
	Potencia de un cociente	$a^n:b^n=(a:b)^n$
	Producto de potencias de la misma base	$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$
	Cociente de potencias de la misma base	$a^n:a^m=a^{n-m}$
	Potencia de una potencia	$(a^n)^m=a^{n\cdot m}$
	Potencia de base negativa	$(-1)^n\rightarrow 1\, si\, n\, es\, par / -1\, si\, n\, es\, impar$
	Potencia de exponente negativo	$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$
radicales	Raíz	$\sqrt[n]{a}=b\Leftrightarrow b^n=a$
	No existe la raíz de índice par de un número negativo	
	Radical como una potencia de exponente fraccionario.	$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

Unidad 1: Números y álgebra

1.4 Propiedades de los radicales

Radicales equivalentes: se multiplica o se divide el índice del radical y el exponente del radicando por el mismo número.

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[q \cdot n]{a^{q \cdot p}} \longrightarrow \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[8]{3^6}$$

Producto/división de radicales de igual índice: Se agrupan los radicandos bajo la misma raíz.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \longrightarrow \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{3 \cdot 5} = \sqrt[4]{15}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \longrightarrow \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{3}{5}}$$

Raíz de una raíz: Se multiplican los índices de las raíces.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^p}} = \sqrt[m \cdot n]{a^p} \longrightarrow \sqrt[2]{\sqrt[3]{7^7}} = \sqrt[6]{7^7}$$

Potencia de una raíz: Se multiplican los exponentes.

$$\left(\sqrt[n]{a^p}\right)^m = \sqrt[n]{a^{m \cdot p}} \longrightarrow \left(\sqrt[4]{3^5}\right)^6 = \sqrt[4]{3^{30}}$$

1.5 Introducción y extracción de factores

Para introducir factores en un radical basta con multiplicar el exponente por el índice de la raíz.

$$a^p \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b \cdot a^{p \cdot n}} \longrightarrow 3 \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5 \cdot 3^4}$$

Para extraer factores de un radical tenemos que dividir el exponente entre el índice de la raíz. El cociente es el exponente del factor que sale fuera. El resto es el exponente de lo que queda dentro.

$$\sqrt{x^9} = x^4 \sqrt{x}$$

1.6 Operaciones con radicales

Para **sumar o restar radicales estos tienen que ser iguales**. Si no lo son, podemos intentar simplificarlos y ver si podemos agruparlos.

$$\mathbf{2\sqrt{27} + \sqrt{3} - \sqrt{2}} = 2\sqrt{3^3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2 \cdot 3\sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 7\sqrt{3} - \sqrt{2}$$

1º Paso: Factorizar

2º Paso: Extraer

3º Paso: Agrupar radicales equivalentes

Los **radicales pueden multiplicarse si su índice es igual** (puedes verlo en sus propiedades arriba en esta página).

Si el **índice no es igual** habrá utilizar **radicales equivalentes** que sí lo tengan. (Es igual que cuando realizamos el común denominador para sumar fracciones).

$$\sqrt[4]{2^2}\cdot\sqrt[3]{2^5} = \sqrt[12]{2^{2\cdot 3}}\cdot\sqrt[12]{2^{5\cdot 4}} = \sqrt[12]{2^6}\cdot\sqrt[12]{2^{20}} = \sqrt[12]{2^6\cdot 2^{20}} = \sqrt[12]{2^{26}} = 2^2\,\sqrt[12]{2^2}$$

2º Paso: Por las propiedades de los radicales como tienen el mismo índice se pueden agrupar en una misma raíz.

3º Paso: Simplificamos aplicando las propiedades de las potencias y extraemos si fuera posible.

1.7 Racionalizar

Racionalizar consiste en eliminar las raíces del denominador. Hay varias técnicas para conseguirlo.

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot 1 = \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5\sqrt[7]{2^3}}} = \frac{3}{5\sqrt[7]{2^3}}\cdot\frac{\sqrt[7]{2^5}}{\sqrt[7]{2^5}} = \frac{3\sqrt[7]{2^4}}{5\sqrt[7]{2^3\cdot 2^4}} = \frac{3\sqrt[7]{2^4}}{5\sqrt[7]{2^7}} = \frac{3\sqrt[7]{2^4}}{5\cdot 2} = \frac{3\sqrt[7]{2^4}}{10}$$

Puede suceder que nos encontremos un denominador con sumas y restas. En este caso utilizaremos el **conjugado**.

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{\sqrt{4}-1}} = \frac{3}{\sqrt{4}-1}\cdot\frac{\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}+1} = \frac{3\,(\sqrt{4}+1)}{(\sqrt{4}-1)\,(\sqrt{4}+1)} = \frac{3\,(\sqrt{4}+1)}{4-1} = \frac{3\,(\sqrt{4}+1)}{3} = \sqrt{4}+1$$

En el denominador hemos realizado una identidad notable:

$$(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2$$

El conjugado de una suma o resta son los mismos números pero cambiando el signo de la operación.
El conjugado de a+b es a-b.

1.8 Logaritmos

Un logaritmo es una expresión matemática de la forma:

$$\log_b r = x$$

Que se lee de la siguiente manera: El logaritmo en base b de r es igual a x.

Pero ¿Qué es realmente un logaritmo? La forma más sencilla es entendiendo el logaritmo como si fuera una pregunta:

¿A qué número x tengo que elevar b para obtener r?

$$\log_b r = x \Leftrightarrow b^x = r \qquad \log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

Vamos a ver varios ejemplos para entender el concepto de logaritmo:

Si nos preguntan cuanto vale el logaritmo en base 5 de 25, la respuesta es 2 porque $5^2 = 25$

$$\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$$

Si los números son un poco más complicados recurrimos a la factorización:

$$\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$$

Como vemos, el logaritmo nos dice el exponente que tenemos que utilizar para conseguir el número de su interior.

Vamos a ver algunos ejemplos más:

$$\log_3 3^7 = 7 \qquad \log_{20} 20^6 = 6 \qquad \log_a a^4 = 4 \qquad \log_5 5^2 = 2$$

Los logaritmos pueden complicarse, por ejemplo con fracciones, pero no te agobies, solo tienes que factorizar y aplicar las propiedades de las potencias:

$$\log_3 \frac{1}{27} = \log_3 \frac{1}{3^3} = \log_3 3^{-3} = -3$$

Puede suceder que el número sea un decimal. En esos casos lo convertimos en fracción, simplificamos y nos encontraremos en el caso anterior:

$$\log_2 0{,}25 = \log_2 \frac{25}{100} = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 \frac{1}{2^2} = \log_2 2^{-2} = -2$$

¿Y si aparecen raíces? Las convertimos en potencias y el problema se resuelve rápidamente:

$$\log_2 \sqrt[6]{2^5} = \log_2 2^{\frac{5}{6}} = \frac{5}{6}$$

$$\log_a \sqrt{a} = \log_a 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Aplicando la definición, podemos resolver otros ejercicios en los que desconocemos la base o el argumento del logaritmo.

:

$$\log_x 9 = 2 \qquad \log_x \frac{25}{4} = 2 \qquad \log_3 x = 2 \qquad \log_5 x = \frac{5}{4}$$

$\log_x 9 = 2$	$\log_x \frac{25}{4} = 2$	$\log_3 x = 2$	$\log_5 x = \frac{5}{4}$
$x^2 = 9$	$x^2 = \frac{25}{4}$	$x = 3^2 = 9$	$x = 5^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{5^5}$
$x = \sqrt{9} = 3$	$x = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$		

Propiedades

Los logaritmos tiene algunas propiedades interesantes:

Logaritmo de un producto: $log_b\,(r \cdot s) = log_b\, r + log_b\, s$ → $log_2\,(3 \cdot 4) = log_2\, 3 + log_2\, 4$

Logaritmo de un cociente: $log_b\,(\frac{r}{s}) = log_b\, r - log_b\, s$ → $log_7\,(\frac{3}{4}) = log_7\, 3 - log_7\, 4$

Logaritmo de una potencia: $log_b\,(r^n) = n \cdot log_b\, r$ → $log\,(2^3) = 3 \cdot log\, 2$

Vamos a ver algunos ejemplos de aplicación de las propiedades y de la definición de logaritmo:

Simplifica todo lo que puedas las siguientes expresiones:

$$\boldsymbol{log\ 40 + log\ 25} \;=\; log\,(40 \cdot 25) \;=\; log\ 1000 \;=\; log\ 10^3 \;=\; 3$$

1º Aplicamos el logaritmo de un producto pero en vez de para separar para unir.

2º Al realizar la operación obtenemos 1000. La base es 10. ¿Podemos expresar 1000 como una potencia de 10?

3º Como la respuesta es sí podemos dar el resultado exacto del logaritmo.

$$\boldsymbol{2 \cdot log\ 2 + log\ 25} \;=\; log\,(2^2) + log\ 25 \;=\; log\,(4 \cdot 25) \;=\; log\ 100 \;=\; log\ 10^2 \;=\; 2$$

Aplicamos el logaritmo de una potencia.

Aplicamos el logaritmo de un producto pero en vez de para separar para unir.

Al realizar la operación obtenemos 1000. La base es 10. ¿Podemos expresar 1000 como una potencia de 10?

Como la respuesta es sí podemos dar el resultado exacto del logaritmo.

2. Álgebra

2.1 Raíces de un polinomio

Llamamos **raíces de un polinomio** P(x) a aquellos números **“a”** que hacen que el valor numérico del polinomio sea **0**.

$$x = a \text{ es una raíz de P(x) } \quad \text{si} \quad P\,(a) \;=\; 0$$

Para el siguiente polinomio x=2 sería una raíz, pero x=1 no es una raíz.

$$P\,(x) \;=\; x^2 - 5\,x + 6$$

$$P\,(1) \;=\; 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 \;=\; 2 \qquad\qquad P\,(2) \;=\; 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 \;=\; 0$$

2.2 División de polinomios (teorema del resto)

Vamos a comparar la división hecha por Ruffini con la división normal.

$$(3\,x^3+4\,x-6):(x+2)$$

$3x^3$	$+0x^2$	$+4x$	-6	x	$+2$	
$-3x^3$	$-6x^2$			$3x^2$	$-6x$	$+16$
	$-6x^2$	$+4x$	-6			
	$6x^2$	$+12x$				
		$16x$	-6			
		$-16x$	-32			
			-38			

	3	0	4	-6
-2		-6	12	-32
	3	-6	16	-38

Si nos fijamos en el **último número de Ruffini** vemos que se corresponde con el **resto de la división**.
Por otra parte **los coeficientes** que nos han salido se corresponde con los coeficientes del **cociente de la división**.
(Siempre se empieza derecha a izquierda a partir del resto: termino independiente, coeficiente de x, coeficiente de x^2, coeficiente de x^3 ...)

TEOREMA DEL RESTO: Si calculamos el valor numérico del polinomio **$P(x) = 3x^3 + 4x - 6$** para **$x=-2$**, este va a coincidir con el resto.

$$P(-2)=3\cdot(-2)^3+4\cdot(-2)-6=-38$$

2.3 Factorización

La factorización de un polinomio consiste en escribirlo como producto de polinomios del menor grado posible. Un polinomio puede ser expresado en un producto de binomios del tipo **(x – a)**, **en el que "a" hace referencias a las raíces del polinomio.**

$$P(x)=x^4-9\,x^2+4\,x+12 \quad\rightarrow\quad P(x)=x^4-9\,x^2+4\,x+12 \;=\; (x+1)(x-2)(x-2)(x+3)$$

Las raíces de este polinomio son -1, +2, -2 y -3.

Polinomios de 1ºgrado
Estos polinomios ya se encuentran factorizados. Si se puede, extraemos factor común.

$$P(x) \;=\; x-5 \;=\; (x-5) \qquad\qquad Q(x) \;=\; 3\,x-15 \;=\; 3\,(x-5)$$

Polinomios de 2ºgrado

Case A: No hay término independiente P(x)= ax² + bx
1º Sacamos factor común

$$P(x)=x^2-4\,x \qquad\qquad Q(x) \;=\; 5\,x^2-30\,x$$

$$P(x) \;=\; x\,(x-4) \qquad\qquad Q(x) \;=\; 5\,x\,(x-6)$$

Case B: Hay término independiente.
1º Resolvemos la ecuación para encontrar las ráices del polinomio.
2º Escribimos la solución.

$$P(x)=2\,x^2-7\,x+3$$

$$2\,x^2-7\,x+3=0 \qquad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\,ac}}{2\,a}$$

$$x=\frac{+7\pm\sqrt{49-4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2}=\frac{+7\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{+7\pm5}{4}=\begin{cases}3\\ \frac{1}{2}\end{cases}$$

$$P(x)=2\,x^2-7\,x+3 \;=\; 2\,(x-3)\,(x-\frac{1}{2})$$

Si el coeficiente del término principal no es 1, tenemos que añadirlo a la factorización.

$$Q(x)=x^2-4$$

$$x^2-4=0$$

$$x^2=4$$

$$x=\sqrt{4} \;=\begin{cases}+2\\ -2\end{cases}$$

$$Q(x) \;=\; (x-2)\,(x+2)$$

Polinomios de grado mayor a 2.

1º Si es posible extrae factor común. (Esto es necesario si no hay término independiente.
2º Si después del paso anterior nos queda un polinomio de grado 2 o superior tenemos que factorizarlo. Si es de grado superior a 2 utilizaremos Ruffini.
3º Cuando tengas todas las raíces, escribe la solución.

$$P(x) = 6x^4 - 5x^3 - 11x^2 + 13x - 3$$

$$6x^4 - 5x^3 - 11x^2 + 13x - 3 = 0$$

1, -1, 3 y -3

	6	-5	-11	+13	-3
1		6	1	-10	3
	6	1	-10	3	0
1		6	7	-3	
	6	**7**	**-3**	0	

When the roots are not integers, we have to solve the quadratic equation

$$6x^2 + 7x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 6 \cdot (-3)}}{2 \cdot 6} = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{12} = \frac{-7 \pm 11}{12} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$$P(x) = 6(x-1)(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

$$P(x) = 6(x-1)^2\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

Don't forget the leading term.

2.4 Fracciones algebraicas

Una **fracción algebraica** es una fracción donde el denominador es un polinomio (normalmente el numerador también).

$$\frac{5x^2+2}{3x^3+5x+4}$$

Un ejercicio muy típico es el de simplificación de fracciones algebraicas.
Para **simplificar fracciones algebraicas** se factoriza el numerdador y el denominador y luego se simplifica todo lo que pueda eliminando factores.

Ejemplo: Simplifica la siguiente fracción algebraica:

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x+1)}{(x-1)}$$

Factorizamos el numerador y el denominador. En este caso lo podemos hacer directamente si nos damos cuenta de que son identidades notables.

Simplificamos los factores comunes que se encuentran arriba y abajo.

Las fracciones algebraicas se pueden sumar y restar. Para ellos trabajaremos igual que con las fracciones normales. Reduciremos a común denominador **utilizando el mcm** y luego sumaremos o restaremos los numeradores.

$$\frac{\mathbf{2x^2+5x}}{\mathbf{x+1}} + \frac{\mathbf{5x^2-7x}}{\mathbf{x+1}} = \frac{7x^2-2x}{x+1}$$

Como el denominador es igual tan solo tenemos que sumar y restar los numeradores.

$$\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{x+2}} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{x-2}} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{x^2-4}} = \frac{5}{x+2} + \frac{2}{x-2} - \frac{3}{(x+2)(x-2)} = \frac{5(x-2)+2(x+2)-3}{(x+2)(x-2)} = \frac{7x-9}{(x+2)(x-2)}$$

Como los denominadores no son iguales hay que **factorizarlos** para realizar el mcm.
En este caso los dos primeros ya están factorizados y solo tenemos que factorizar el último.

Realizamos el mcm de los denominadores. Para ello cogemos los factores comunes y no comunes de mayor exponente. Una vez que lo tenemos **multiplicamos cada numerador por los factores que le faltan a su denominador.**

Realizamos las operaciones y si se puede simplificamos. .

Multiplicar o dividir fracciones algebraicas se hace igual que con fracciones númericas. En algunos ejercicios puede resultar más sencillo factorizar los polinomios antes de multiplicar.

$$\frac{\mathbf{x^2+2x+1}}{\mathbf{x^2-1}} \cdot \frac{\mathbf{x^2-2x+1}}{\mathbf{(x+1)^3}} = \frac{(x+1)^2\cdot(x-1)^2}{(x+1)(x-1)(x+1)^3} = \frac{(x+1)^2\cdot(x-1)^2}{(x+1)^4(x-1)} = \frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{x^2+2x+1}$$

$$\frac{\frac{\mathbf{3x^2-9x}}{\mathbf{x^2-9}}}{\frac{\mathbf{x-3}}{\mathbf{x+3}}} = \frac{\frac{3(x-3)}{(x+3)(x-3)}}{\frac{(x-3)}{(x+3)}} = \frac{3(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-3)^2} = \frac{3}{x-3}$$

3. Ecuaciones

3.1 Ecuaciones de 2º grado

$$x^2-x-2=0 \longrightarrow \begin{matrix} a=1 \\ b=-1 \\ c=-2 \end{matrix}$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1(-2)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{matrix} x=2 \\ x=-1 \end{matrix}$$

Ecuación de 2ºgrado incompleta b=0:

$$x^2-4=0$$

$$x^2=4$$

$$x=\sqrt{4}$$

$$x=\pm 2$$

Ecuación de 2ºgrado incompleta c=0:

$$x^2-x=0$$

$$x(x-1)=0$$

$$x=0 \qquad x-1=0$$

$$x=1$$

3.2 Ecuaciones de grado mayor a 2

$$x^4-x^3-4x^2+4x=0$$

$$x(x^3-x^2-4x+4)=0$$

Sacamos factor común.

$$x=0 \qquad x^3-x^2-4x+4=0$$

	1	-1	-4	4
1		1	0	-4
	1	**0**	**-4**	0
2		2	4	
	1	2	0	
-2		-2		
	1	0		

En ocasiones ninguno de los divisores del último número, (-4 en este ejemplo) es solución, entonces es necesario resolver la ecuación de segundo grado.

$$\boldsymbol{x^2-4=0}$$

$$x^2=4$$

$$x=\sqrt{4}$$

$$x=2 \qquad x=-2$$

Por tanto las soluciones de esta ecuación serían 0, 1, 2 y -2

¡No olvides las ecuaciones bicuadradas!

3.3 Ecuaciones con radicales

La idea con este tipo de ecuaciones, tengan las raíces que tengan, es siempre la misma, aislar una raíz y elevar al índice de la raíz. Veamos un ejemplo.

$$3-\sqrt{x-1}=x$$

$$-\sqrt{x-1}=x-3$$

1ºPaso: Aislar la raíz. Da igual que dejemos el signo negativo ya que al elevar al cuadrado se irá.

$$(-\sqrt{x-1})^2=(x-3)^2$$

2ºPaso: Elevamos al cuadrado para eliminar la raíz. Recuerda: si elevamos una raíz a su índice el resultado es lo de dentro de la raíz.

$$x-1=x^2+9-6x$$

3ºPaso: Ejecutamos los cuadrados. Si hubiera más raíces volveríamos al paso 1 hasta eliminarlas todas.

$$-x^2+7x-10=0$$

4ºPaso: Agrupamos todos los términos.

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{(7)^2-4\cdot(-1)(-30)}}{2\cdot(-1)}=\frac{-7\pm 3}{-2}=\begin{matrix} \boldsymbol{x=2} \\ \boldsymbol{x=5} \end{matrix}$$

5ºPaso: Resolvemos la ecuación resultante.

x=2

$$3-\sqrt{2-1}=2 \quad ✓$$

x=5

$$3-\sqrt{5-1}=5 \quad ✗$$

6ºPaso: Comprobamos si las soluciones verifican la ecuación. En este caso 2 es solución y 5 no.

3.4 Ecuaciones exponenciales

Dependiendo de la forma de estas ecuaciones hay diferentes estrategias para resolverlas (cambio de variable, aplicar logaritmos...).
Para este repaso vamos a ver el caso más sencillo, en el que podemos expresar ambos miembros de la igualdad como potencias de una misma base.

$$2^2 \cdot 2^x = 8^{(x+1)}$$

$$2^{x+2} = (2^3)^{x+1}$$

$$2^{x+2} = 2^{3(x+1)}$$

$$2^{x+2} = 2^{3x+3}$$

$$x+2 = 3x+3$$

$$-2x = 1$$

$$x = \frac{-1}{2}$$

1ºPaso: Factorizamos y aplicamos las propiedades de las potencias. En este caso hemos aplicado las propiedades de:

- Producto de potencias de la misma base: se suman los exponentes.
- Potencia de una potencia: Se multiplican los exponentes.

2ºPaso: Igualamos los exponentes y resolvemos la ecuación.

3.5 Ecuaciones con denominador

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{3}{10}$$

En estos ejercicios lo primero es hacer denominador común de **TODOS** los términos.

mcm (x, x+3, 10) =10x(x+3)

$$10\color{red}{x}(x+3)\frac{1}{\color{red}{x}} - 10x\color{red}{(x+3)}\frac{1}{\color{red}{x+3}} = \color{red}{10}x(x+3)\frac{3}{\color{red}{10}}$$

Multiplicamos toda la ecuación por el mcm de los denominadores y simplificamos.
Este paso podemos "saltarlo y escribir directamente el siguiente si la ecuación es sencilla (y/o tenemos práctica)

$$10(x+3) - 10x = 3x(x+3)$$

Resolvemos la ecuación que nos ha quedado.

$$3x^2 + 9 - 30 = 0$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 3(-30)}}{2 \cdot 3} = \frac{-9 \pm 21}{6} = \begin{matrix} \boldsymbol{x=2} \\ \boldsymbol{x=-5} \end{matrix}$$

En estos ejercicios hay que **COMPROBAR** siempre las soluciones ya que pueden no coincidir o que salga 0 en el denominador en cuyo caso no es solución.

x=2

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2+3} = \frac{3}{10} \quad ✓$$

x=-5

$$\frac{1}{-5} - \frac{1}{-5+3} = \frac{3}{10} \quad ✓$$

3.6 Ecuaciones logarítmicas

Resuelve la siguiente ecuación logarítmica:

$$\log 4x - \log 2 = 4 \log(2)$$

Aplicamos el logaritmo de los logaritmos para que solo quede un logaritmo a cada lado. En este caso hemos aplicado logaritmo de un producto en la izquierda y logaritmo de una potencia en la derecha.

$$\log\left(\frac{4x}{2}\right) = \log(16)$$

Si los logaritmos son iguales entonces su interior también tiene que ser igual. En este paso hemos simplificado directamente 4/2 =2.

$$2x = 16$$

Por último resolvemos la ecuación resultante.

$$x = 8$$

3.7 Inecuaciones de 1º grado

Se resuelve como una ecuación normal.
Recuerda que el signo de la desigualdad se ve afectado al cambiar el signo de la ecuación.

$$\frac{x-1}{3} - \frac{2x-4}{4} \leq 1$$

En esta ecuación comenzamos quitando los denominadores. En este caso **el mínimo común múltiplo es 12**.

$$4(x-1) - 3(2x-4) \leq 12$$

$$4x - 4 - 6x - 12 \leq 12$$

Proseguimos y quitamos denominadores agrupando las incógnitas a un lado y los términos independientes a otro.

$$-2x \leq 4$$

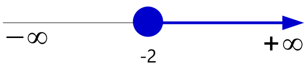
$$x \geq \frac{4}{-2}$$

Como el coeficiente de la incógnita es negativo, -2x, cuando "pase" dividiendo debemos de cambiar el signo de la desigualdad.

$$x \geq -2$$

$$x \in [-2, +\infty)$$

Finalmente representamos la solución sobre la recta real.



3.8 Inecuaciones de 2º grado

Estas inecuaciones se resuelven casi de igual forma que las ecuaciones de 2º grado. Veamos un ejemplo:

1º paso: dejamos en 0 uno de los miembros de la ecuación.

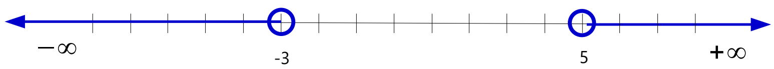
$$x^2 + 9x + 20 < 3x^2 + 5x - 10 \qquad \mathbf{-2x^2 + 4x + 30 < 0}$$

a=-2
b=4
c=30

2º paso: Resolvemos la ecuación de segundo grado sin que importe la desigualdad.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4 \cdot (-2) 30}}{2 \cdot (-2)} = \frac{4 \pm \sqrt{256}}{-4} = \frac{4 \pm 16}{-4} = \begin{matrix} \mathbf{x=5} \\ \mathbf{x=-3} \end{matrix}$$

3º paso: Buscamos los intervalos de la recta que satisfagan la desigualdad.



Escogemos un número más pequeño que -3, por ejemplo -10 y comprobamos:

$$\mathbf{-2(-10)^2 + 4(-10) + 30 = -210 < 0}$$

✓

Escogemos un número entre -3 y 5, por ejemplo el 0 y comprobamos:

$$\mathbf{-2(0)^2 + 4(0) + 30 = 30 < 0}$$

✗

Escogemos un número más grande que 5, por ejemplo el 10 y comprobamos:

$$\mathbf{-2(10)^2 + 4(10) + 30 = -130 < 0}$$

✓

Nota: No hace falta hallar el valor final, tan solo ver si el resultado es positivo o negativo.

Solución: $x \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$

4. Sistemas de ecuaciones

4.1 Métodos

Sustitución

$$\begin{cases} 2x+y=1 \longrightarrow y=1-2x \\ 3x-2y=12 \end{cases}$$

$$3x-2(1-2x)=12$$

$$3x-2+4x=12$$

$$3x+4x=12+2$$

$$7x=14$$

$$x=2$$

$$y=1-2x$$

$$y=1-2(2)=-3$$

Solución (2, -3)

Igualación

$$\begin{cases} 2x+y=1 \longrightarrow x=\dfrac{1-y}{2} \\ 3x-2y=12 \longrightarrow x=\dfrac{12+2y}{3} \end{cases}$$

$$\frac{1-y}{2}=\frac{12+2y}{3}$$

$$3(1-y) = 2(12+2y)$$

$$3-3y = 24+4y$$

$$-3y-4y = 24-3$$

$$-7y = 21$$

$$\boxed{y = -3}$$

$$x = \frac{1-y}{2}$$

$$x=\frac{1-(-3)}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Solución (2, -3)

Reducción

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-2y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-2y=12 \end{cases} \xrightarrow[-2\cdot E2]{3\cdot E1} \begin{cases} 6x+3y=3 \\ -6x+4y=-24 \end{cases}$$

$$7y=-21$$

$$7y=-21$$

$$y=-21/7$$

$$y=-3$$

$$2x-3=1$$

$$2x=4$$

$$x=2$$

Solución (2, -3)

Método gráfico

Estas ecuaciones e llaman lineales porque si se dibujan en un sistema de coordenadas su dibujo es una recta. De esta forma el punto donde se corten será la solución.

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-2y=12 \end{cases}$$

La forma más sencilla consiste en despejar la y de cada una de las ecuaciones. A continuación le damos valores a la x y obtenemos los de la y. Al unirlos nos saldrá la recta de la ecuación.

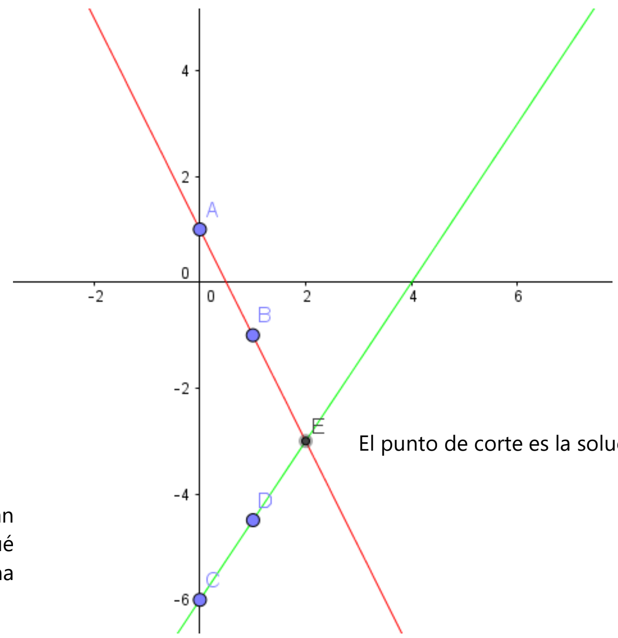
$$y=1-2x$$

x	y
0	1
1	-1
2	-3

$$y=\frac{12-3x}{2}$$

x	y
0	-6
1	-4,5
2	-3

Podemos darle a la x los valores que queramos. En este caso se han elegido los valores 0, 1 y 2 para los dos casos pero no tienen por qué coincidir Por otra parte solo con dos valores es suficiente para dibujar una recta.



El punto de corte es la solución.

4.2 Tipos de sistemas

Estos sistemas pueden tener **una solución, infinitas soluciones o ninguna solución** y existe una forma muy sencilla de averiguarlo.

$$\begin{cases} 2x+1y=1 \\ 3x-2y=12 \end{cases} \qquad \frac{2}{3}\neq\frac{1}{-2}$$

Este sistema **tiene solución** ya que sus coeficientes no son proporcionales. Si representáramos las dos rectas estas se cortarían en un punto. Se dice que es un **sistema compatible determinado.**

Si se resuelve obtenemos como resultado una valor para la x y otro para la y.

$$\begin{cases} 4x+2y=6 \\ 2x+1y=3 \end{cases} \qquad \frac{4}{2}=\frac{2}{1}=\frac{6}{3}$$

Este sistema **tiene infinitas soluciones** ya que todos sus coeficientes son proporcionales. Si representáramos las dos rectas estarían superpuestas. Se dice que es un **sistema compatible indeterminado.**

Si se resuelve obtendremos algo del tipo 0y=0 o 0x=0.

$$\begin{cases} 4x+2y=6 \\ 2x+1y=4 \end{cases} \qquad \frac{4}{2}=\frac{2}{1}\neq\frac{6}{4}$$

Este sistema **no tiene solución** ya que los coeficientes de las incógnitas son proporcionales pero los términos independientes no. Si representáramos las dos rectas tendríamos dos rectas paralelas. Se dice que es un **sistema incompatible.**

Si se resuelve obtendremos algo del tipo 0y=a o 0x=b. (a y b son dos números cualesquiera pero distintos de 0)

4.3 Sistemas de ecuaciones no lineales

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1-\frac{1}{xy} \\ xy=6 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1-\frac{1}{xy} \xrightarrow{\text{Mcm= xy}} y+x=xy-1 \longrightarrow y+x-xy=-1$$

1º Paso: Cuando alguna de las ecuaciones tiene denominadores es conveniente simplificarla antes de resolver el sistema.

$$\begin{cases} y+x-xy=-1 \\ xy=6 \end{cases} \longrightarrow x=\frac{6}{y} \qquad y+\frac{6}{y}-\frac{6}{y}y=-1$$

2º Paso: Elegimos el método adecuado, en este caso la opción mas sencilla es despejar la x o la y de la segunda ecuación y hacer sustitución.

$$y+\frac{6}{y}-6=-1$$

$$y^2+6-6y=-1y$$

$$y^2-5y+6=0 \begin{cases} y=2 \\ y=3 \end{cases}$$

3º Paso: Resolvemos la ecuación resultante. De nuevo aparecen denominadores por lo que debemos multiplicar todo por el mcm que en este caso es y.

$$y=2 \qquad x=\frac{6}{2}=3 \qquad\qquad y=3 \qquad x=\frac{6}{3}=2$$

4º Paso: Averiguamos el valor de la otra incógnita. En estos sistemas es común que hayan varias soluciones. Por ejemplo en este caso las soluciones (x,y) son **(2, 3) y (3,2).** Como hay denominadores es necesario **COMPROBAR**. En este caso ambos son solución.

$$\begin{cases} x^2-16y^2=0 \\ x+3y=7 \end{cases} \longrightarrow x=7-3y$$

1º Paso: Si la ecuación tuviera paréntesis o no estuviera ordenada se simplifica.

2º Paso: Elegimos el método adecuado, en este caso la opción mas sencilla es despejar la **x** de la segunda ecuación y hacer sustitución.

$$(7-3y)^2-16y^2=0$$

$$7y^2+42y-49=0 \begin{cases} y=1 \\ y=-7 \end{cases}$$

3º Paso: Resolvemos la ecuación resultante.

$$y=1 \qquad x=7-3\cdot1=4 \qquad\qquad y=-7 \qquad x=7-3\cdot(-7)=28$$

4º Paso: Averiguamos el valor de la otra incógnita. En estos sistemas es común que hayan varias soluciones. Por ejemplo en este caso las soluciones (x,y) son (4, 1) y (28, -7).