Trigonometría I

La trigonometría (medición de triángulos) es una rama de las matemáticas que se dedica al estudio de las razones trigométricas de los ángulos: seno, coseno, tangente…

1-. Ángulos

Para poder aplicar estas razones trigonométricas en ángulos, primero tenemos que tomar una unidad de medida para estos. Vamos a trabajar con dos unidades de medida los **grados sexagesimales** (que pueden expresarse con decimales o con grados º, minutos ' y segundos '') y los **radianes** (rad).

$$0^o = 0\,rad$$

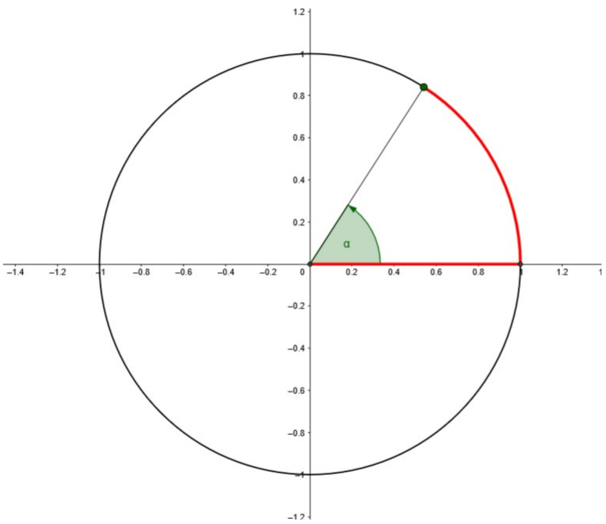
$$90^o = \frac{\pi}{2}\,rad$$

$$180^o = \pi\,rad$$

$$360^o = 2\pi\,rad$$

La unidad de medida de ángulos en el sistema internacional es el radián (rad):

Un radián es la medida del ángulo central de una circunferencia que abarca un arco de longitud igual a la del radio.



Una vuelta entera serían 2π radianes ≈ 6,28 radianes.

Una radián es aproxidamente 57.2958º.

Ambas unidades presentan sus ventajas y sus desventajas, así que es bueno acostumbrarse a manejar ambas y sus equivalencias.

Utilizando los radianes podemos obtener cuánto mide un arco de circunferencia simplemente multiplicando el ángulo por el radio.

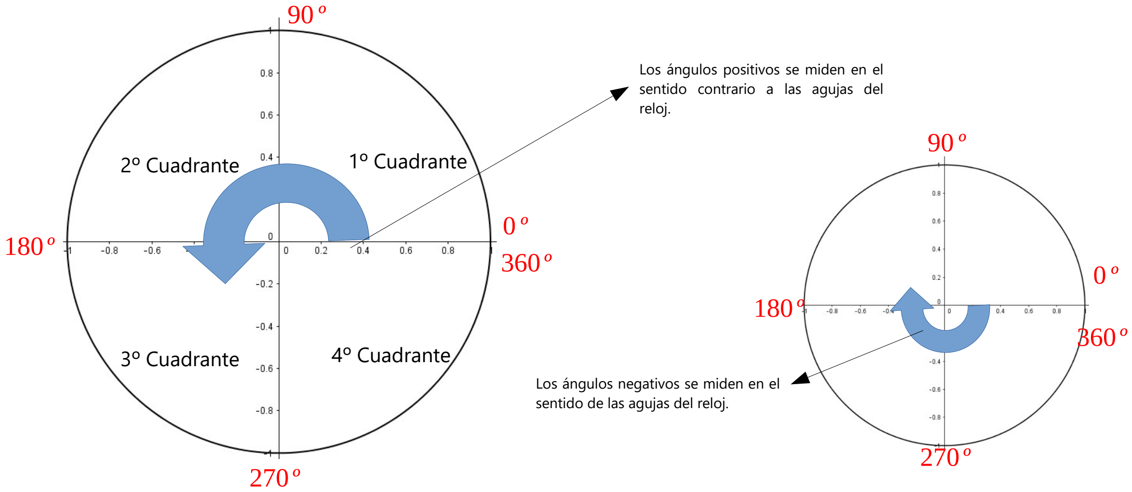
Longitud de un arco de circunferencia = **ángulo en radianes** · **radio**

De esta relación se obtiene la formula del perímetro de una circunferencia

$$P = 2\pi r$$

Para ayudarnos con los ángulos vamos a trabajar con la **circunferencia goniométrica** (una circunferencia centrada en el eje de coordenadas y de **radio 1 unidad**).

Con esta circunferencia podemos representar cualquier ángulo (recuerda que los ángulos positivos van en sentido antihorario).



Para **pasar de grados sexagesimales** (grados a partir de ahora) a **radianes**, basta con aplicar una **regla de 3.**

Para ello basta con aplicar una sencilla regla de 3 utilizando alguna de las equivalencias entre grados y radianes

¿Cuántos radianes son 20 grados?

Hacemos una regla de 3.

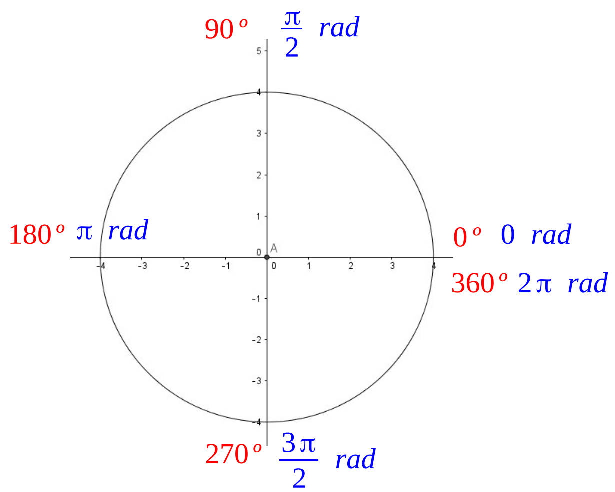
$$\Pi \longrightarrow 180$$
$$x \longrightarrow 20$$

$$x=\frac{20}{180}\pi\ rad\ =\ \frac{1}{90}\pi\ rad$$

¿Cuántos grados son 1 radián?

$$\Pi \longrightarrow 180$$
$$1 \longrightarrow x$$

$$x=\frac{180}{\pi}\ =\ 57{,}11^{o}$$

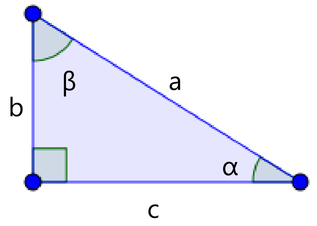


Como habrás observado, **los radianes suelen expresarse en función del número Pi**, mientras que para los grados sí que empleamos los decimales.

2-. Razones trigonométricas de un ángulo

2.1 ¿Qué son las razones trigonométricas?

Utilizando un triángulo rectángulo, obtenemos las famosas razones trigonométricas seno, coseno y tangente; simplemente son la relación que existen entre los distintos lados del triángulo.



$$seno = \frac{cateto\ \ opuesto}{hipotenusa}$$

$$coseno = \frac{cateto\ \ contiguo}{hipotenusa}$$

$$tangente = \frac{cateto\ \ opuesto}{cateto\ \ contiguo}$$

$$sen\,\alpha = \frac{b}{a} \qquad sen\,\beta = \frac{c}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{c}{a} \qquad \cos\beta = \frac{b}{a}$$

$$tg\,\alpha = \frac{b}{c} \qquad tg\,\beta = \frac{c}{b}$$

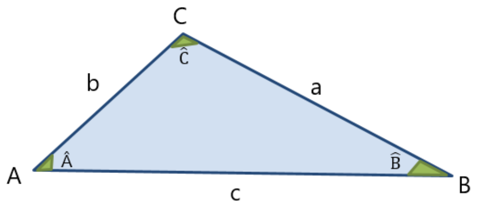
Se utilizan las letras griegas α, β... para nombrar a los ángulos agudos del triángulo.

Nota: Como la hipotenusa es siempre más grande que los catetos, el seno y el coseno se mueven entre los valores -1 y 1.
La tangente, por otra parte, no tiene límite.

Las **razones trigonométricas** de un ángulo **no dependen del triángulo rectángulo elegido** y son siempre las mismas para un mismo ángulo, debido a la semejanza de triángulos (si dos triángulos tienen los mismos ángulos, son proporcionales).

Dependiendo del tipo de ejercicio se puede expresar el ángulo con las letras griegas α, β, γ... o con la nomenclatura de la imagen en la que se nombra por su vértice.

Observa la siguiente imagen para recordar la forma de nombrar los diferentes elementos de un triángulo



En un triángulo nombramos sus **vértices** con letras mayúsculas: A B C
En un triángulo nombramos sus **lados** con la letra del vértice opuesto pero en minúscula a b c
En un triángulo nombramos los **ángulos** con la misma letra del vértice pero añadiendo el símbolo ^

Además del seno, coseno y tangente tenemos las 3 razones trigonométricas inversas:

$$cosecante \rightarrow cosec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha}$$

$$secante \rightarrow sec\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$cotangente \rightarrow cotg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}$$

2.2 Relaciones entre las razones trigonométricas

Existen varias relaciones entre las razones trigonométricas, aquí están las 3 más utilizadas (tienes la demostración en el pdf de demostraciones).

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$$

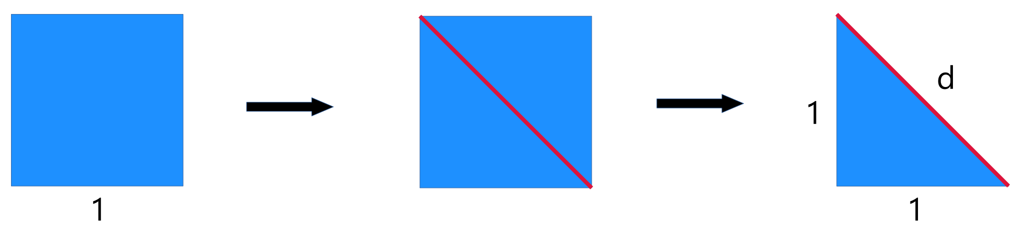
$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

3-. Razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º

Existen tres ángulos agudos cuyas razones trigonométricas se pueden obtener de una forma sencilla utilizando el cuadrado y el triángulo equilatero que son figuras de las que conocemos sus ángulos.

45º

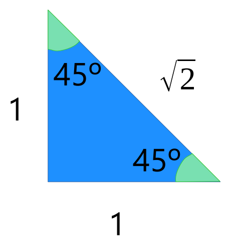
Para obtener las razones trigonométricas de un ángulo de 45º grados vamos a partir de un cuadrado de lado 1 unidad. Si trazamos una diagonal, obtenemos un triángulo rectángulo. Es triángulo tiene un ángulo de 90º y dos de 45º.



Si ahora aplicamos el teorema de Pitágoras, podemos sacar el valor de la diagonal d.

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$
$$d = \sqrt{2}$$

Ahora ya podemos calcular el valor del seno, del coseno y de la tangente.



$$sen\,45^o = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

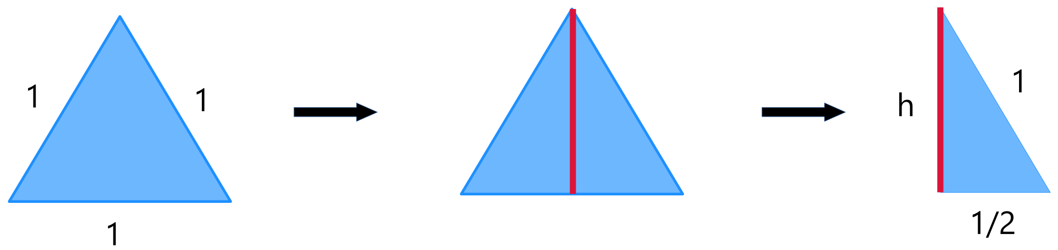
$$\cos 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\,45^o = \frac{1}{1} = 1$$

30º y 60º

Para obtener las razones trigonométricas de estos ángulos vamos a partir de un triángulo equilatero de lado 1. Recuerda que todos los ángulos de un triángulo equilatero miden 60º.

Vamos a trazar su altura, quedándonos un triángulo rectángulo (de ángulos 90º, 60º y 30º).

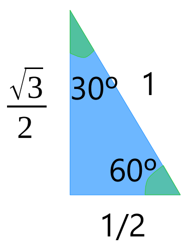


Vamos a aplicar el teorema de Pitágoras para calcular su altura:

$$h^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Y con esto ya podemos obtener las razones trigonométricas de 30º y de 60º ya que son los dos ángulos agudos que aparecen en este rectángulo (como puedes observar están "intercambiadas").



$$sen\,30^o = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \qquad sen\,60^o = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^o = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^o = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$tg\,30^o = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad tg\,60^o = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

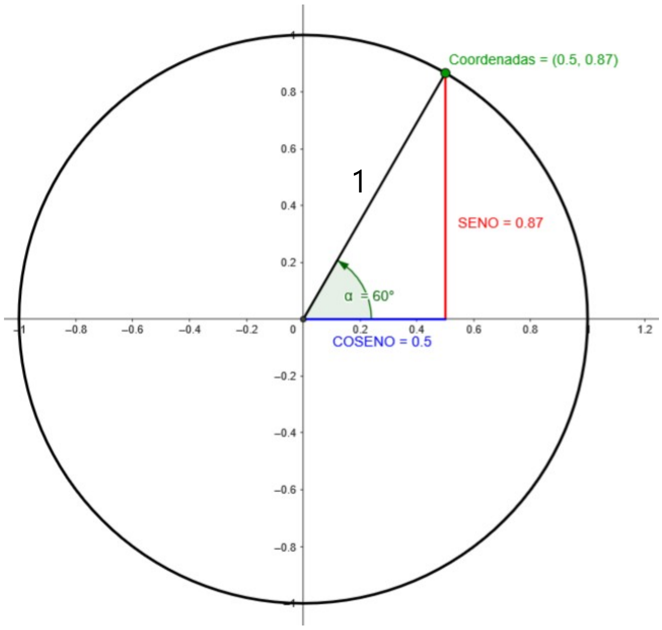
Aunque después de ver esto podrás deducirlas en cualquier momento, es conveniente que intentes memorizarlas ya que se usan para resolver una gran cantidad de ejercicios de trigonometría.

4-. Razones trigonométricas en la circunferencia goniométrica.

Antes hemos visto que podemos representar cualquier ángulo dentro de la circunferencia goniométrica y esto nos da una ayuda increíble.

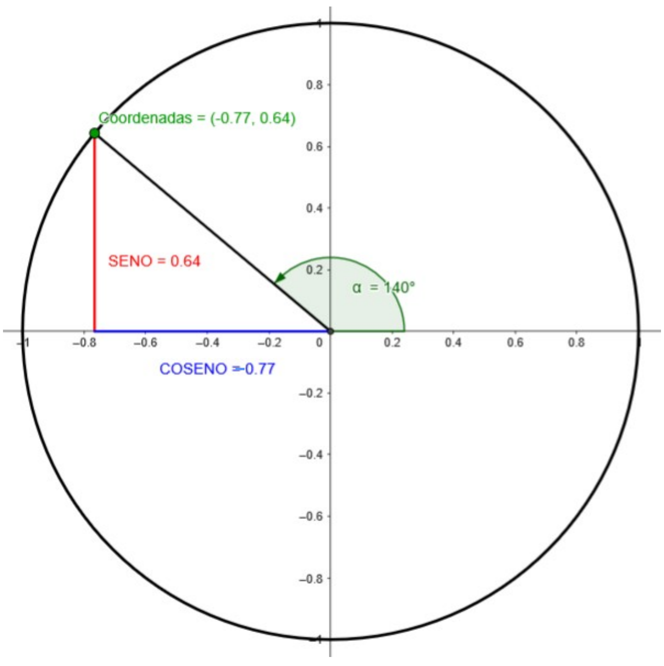
Porque si trazamos el triángulo que forma ese ángulo y nos fijamos en el **punto que queda sobre la circunferencia,** nos encontramos que su coseno es su coordenada en el eje x y su seno su coordenada en el eje y.

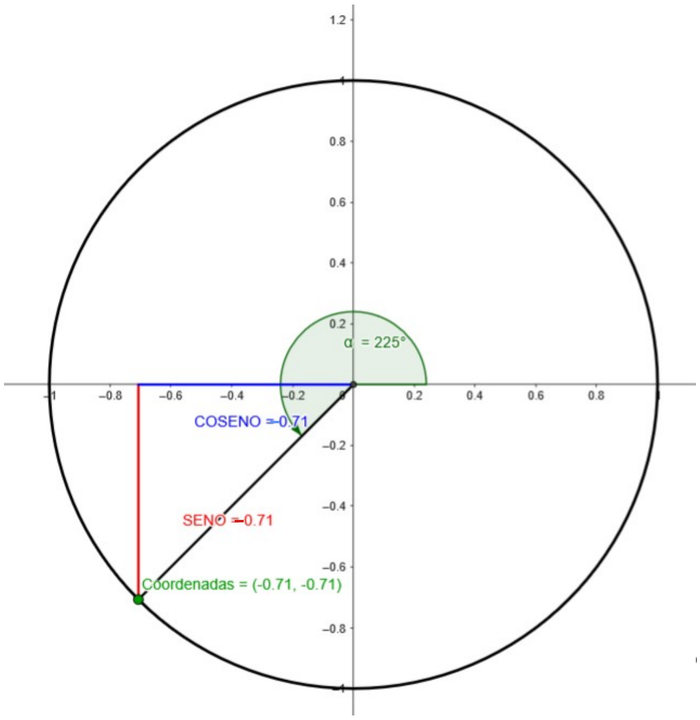
¿Por qué sucede esto?
Porque el **radio** (la *hipotenusa* del triángulo rectángulo que se forma) es **1**. Y en ese caso, como has visto en los ejemplos de 30º y 60º, para **el ángulo formado** el valor del **cateto contiguo** coincide con el **coseno (eje x)**, y el valor del **cateto opuesto** coincide con el **seno (eje y)**.



Y gracias a esto podemos obtener muchísima información (y evitar tener que aprender muchas fórmulas de memoria).

Esta nueva definición de seno y coseno nos permite obtener las **razones trigonométricas de cualquier ángulo** (no solamente los ángulos agudos que obtenemos de los triángulos rectángulos) y vemos que efectivamente el seno y el coseno se mueven entre -1 y 1, que son los límites de nuestra circunferencia.





Usando esta circunferencia podemos conocer fácilmente las **razones trignométricas de 0º, 90º, 180º, 270º y 360º**, así como **los signos** del seno, coseno y tangente de cualquier ángulo.

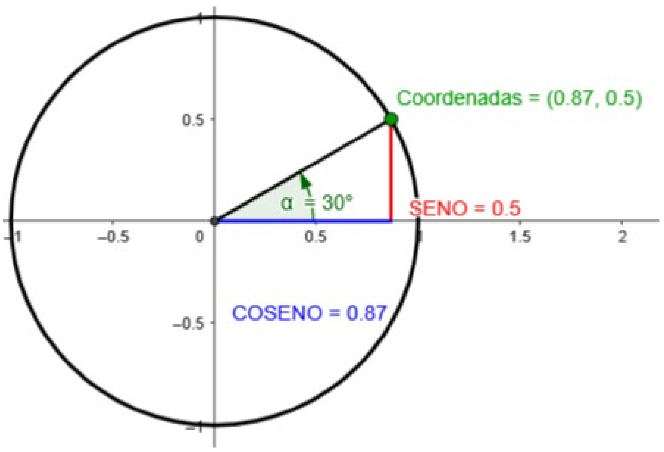
Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
0º | 0 rad	**0**	**1**	**0**
90º | π/2 rad	**1**	**0**	**No definida**
180º | π rad	**0**	**-1**	**0**
270º | 3π/2 rad	**-1**	**0**	**No definida**
360º | 2π rad	**0**	**1**	**0**

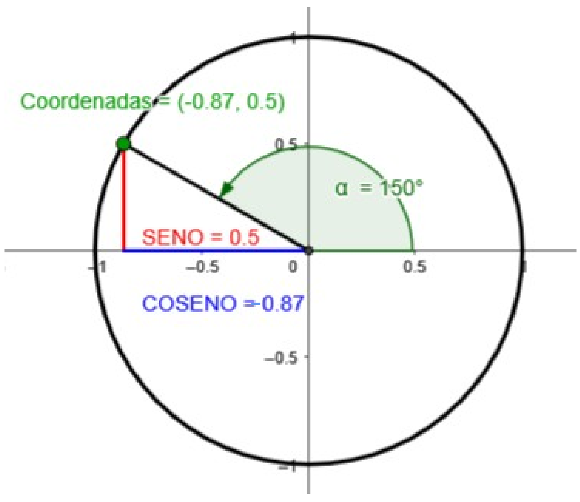
Cuadrante	Seno (eje y)	Coseno (eje x)	Tangente
1º Cuadrante	**+**	**+**	**+**
2º Cuadrante	**+**	**-**	**-**
3º Cuadrante	**-**	**-**	**+**
4º Cuadrante	**-**	**+**	**-**

Observando la circunferencia goniométrica no es necesario memorizar estas tablas.

5-. Reducir al primer cuadrante.

Observa los siguientes ángulos: 30º y 150º





¿Notas alguna similitud? Si te fijas, el **seno** de ambos **es igual** (también su **coseno** aunque el signo sea diferente). Por lo que si conocemos el valor de las razones de uno de esos dos ángulos podríamos conocer las del segundo.

Vamos a emplear esta propiedad para calcular las razones trigonométricas de ángulos de todos los cuadrantes a partir de los valores de los ángulos del primer cuadrante que ya conocemos.

A esto se llama **reducción al primer cuadrante**.

Hay **4 ángulos** con el mismo seno, coseno y tangente (sin cortar el signo), **uno por cada cuadrante**.

En el ejemplo anterior serían 30º, 150º, 210º y 330º. Todos estos ángulos comparten los mismos valores para el seno, coseno y tangente, aunque con signos diferentes dependiendo de su cuadrante.

Experimenta con el siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/QmqYkmwj

Observando la circunferencia goniométrica podemos sacar las siguientes reglas:

- Para reducir un ángulo del **2º cuadrante** al primero basta con hacer **180º – α**
- Para reducir un ángulo del **3º cuadrante** al primero basta con hacer **α – 180º**
- Para reducir un ángulo del **4º cuadrante** al primero basta con hacer **360º – α**

Una vez reducido, nos fijamos en la circunferencia goniométrica para conocer el **signo** de sus razones trigonométricas.

Ejemplo: *Si queremos averiguar el valor del seno de 210º, lo reducimos al primero:*

$$210^{o} - 180^{o} = 30^{o}$$

Y puesto que el seno en el tercer cuadrante tiene signo negativo

$$sen\,210^{o} \;=\; -sen\,30^{o} \;=\; -\frac{1}{2}$$

¿Qué sucede si un ángulo es mayor a 360º?

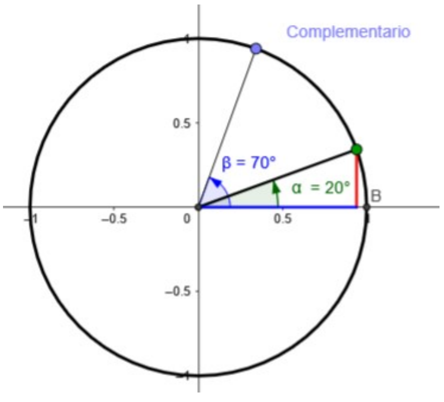
Dividimos entre 360º (número de vueltas completas) y el resto es el ángulo que nos dará las razones trigonométricas.

6-. Ángulos complementarios, suplementarios y opuestos

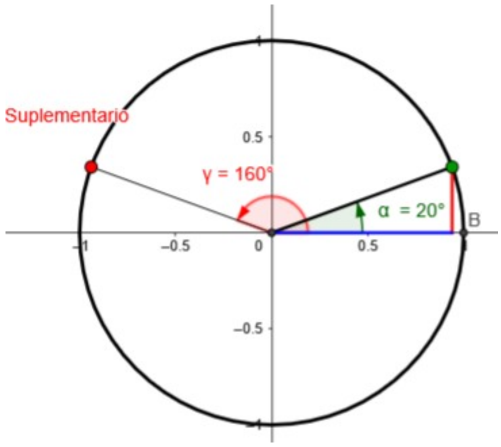
Se dice que dos ángulos son **complementarios** si suman **90º** (los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios).

En estos casos se cumplen que los valores de sus senos y cosenos están intercambiados (como sucede con 30º y 60º).

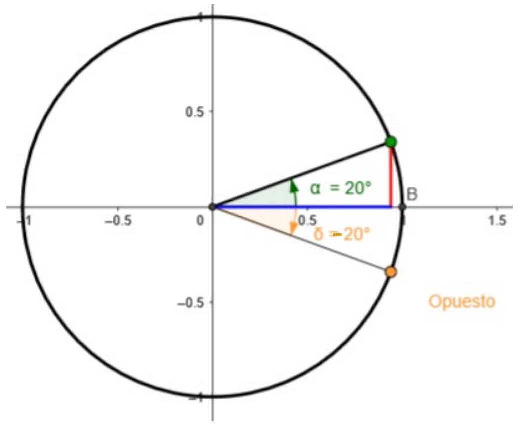
Conocer esto nos va a permitir relacionar más ángulos entre los diferentes cuadrantes.



Se dice que dos ángulos son **suplementarios** si suman **180º**. El suplmentario de un **ángulo agudo** es *"su ángulo del 2º cuadrante"* **180º – α**. Comparten valores para sus razones trigonométricas, pero no sus signos.



El ángulo **opuesto -α** se representa en sentido antihorario y coincide con **360º – α** *("su ángulo del 4º cuadrante")*.



7-. Operar con expresiones trigonométricas

Utilizando todo lo que hemos visto hasta ahora podemos operar con expresiones trigonométricas.

Ejemplo: ***Siendo*** α ***un ángulo del primer cuadrante, simplifica la siguiente expresión:***

$$sen\,\alpha + 2\,sen(\alpha + 180^o) - \cos(90 - \alpha)$$

Vamos a aplicar las realaciones entre los ángulos para simplificar la expresión.

$sen(\alpha + 180^o) = -sen\,\alpha$ → *Ángulo en el tercer cuadrante. Tiene el seno negativo.*

$\cos(90^o - \alpha) = sen\,\alpha$ → *Ángulo complementario*

Una vez que conocemos su relación con el ángulo α, los sustituimos en la expresión y operamos.

$$sen\,\alpha + 2\,sen(\alpha + 180^o) - \cos(90 - \alpha) \;=\; sen\,\alpha + 2\cdot(-sen\,\alpha) - sen\,\alpha \;=\; -2\,sen\,\alpha$$

Ejemplo: ***Demuestra que es cierta la siguiente igualdad***

$$\frac{sec^2\alpha}{cotg\,\alpha}\cdot\left(1-sen^2\alpha\right)cosec^2\alpha=\frac{cosec\,\alpha}{\cos\alpha}$$

Para realizar estos ejercicios no hay un método fijo como sucede para resolver ecuaciones. En estos casos tenemos que ir probando. Cuantas más hagas más fácil te resultará.

Para simplificarnos las operaciones vamos a cambiar la secante, la cosecante y la cotangente. Y también quitaremos el paréntesis aplicando la primera relación fundamental.

$$\frac{tg\,\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha\cdot\frac{1}{sen^2\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha\cdot sen\,\alpha}$$

Simplificamos los cosenos al cuadrado en el primer lado y luego expresamos la tangente como seno entre coseno.

$$\frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{sen^2\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha\cdot sen\,\alpha}$$

Y si ahora simplificamos el seno del numerador con el seno al cuadrado del denominador nos queda:

$$\frac{1}{\cos\alpha\cdot sen\,\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha\cdot sen\,\alpha}$$

Por lo que hemos demostrado que era cierta esta igualdad.

Algunos "*consejos*":

a) Deshazte de las secantes, cosecantes y cotangentes. Es más cómodo trabajar solo con senos, cosenos y tangentes.
b) Aplica las fórmulas de las relaciones trigonométricas.
c) Simplifica numeradores con denominadores.
d) Observa todo atentamente: en ocasiones podrás sacar común o tendrás identidades notables.

8-. Resolver ecuaciones trigonométricas

Una ecuación trigonométrica es una ecuación en la que intervienen las razones trigonométricas de uno o más ángulos. Resolver una ecuación trigonométrica implica calcular todos los ángulos para los cuales es cierta dicha igualdad.

Al resolver una ecuación trigonométrica debemos tener en cuenta:
1) En las ecuaciones trigonométricas debemos observar si el resultado tiene sentido.
2) No debemos olvidar que el seno y el coseno varían entre -1 y 1.

3) Debemos tener cuidado con los signos de las razones trigonométricas teniendo en cuenta el cuadrante del ángulo.
4) Recordar que no toda ecuación tiene solución.
5) Un ángulo no es único sirve él y todas sus vueltas.
6) Expresaremos la solución en grados y radianes.

Ejemplo 1: Cuando solo tenemos una razón trigonométrica.

$$2\,sen\,x \;=\; 1$$

Despejamos el seno.

$$sen\,x \;=\; \frac{1}{2}$$

Este caso es el más sencillo ya que simplemente tenemos que indicar que ángulos tienen como seno ½.

Como hemos estudiado hay 2 ángulos con ese valor: 30º y 150º.

Así que escribimos sus soluciones

$$\begin{cases} x_1 = 30^o + 360^o \cdot k \\ x_2 = 150^o + 360^o \cdot k \end{cases}, con\; k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 2: Cuando tenemos una razón trigonométrica con diferentes grados.

$$2\cos^2\alpha - \cos\alpha - 1 \;=\; 0$$

En este caso en el que tenemos la misma razón trigonométrica pero con diferentes grados, resolveremos la ecuación para esa razón:

$$\cos\alpha \;=\; \frac{1 \pm \sqrt{1^2+8}}{4} \;=\; \frac{1\pm 3}{4} \;=\; \begin{matrix} \dfrac{4}{4} \;=\; 1 \\ \dfrac{-2}{4} \;=\; -\dfrac{1}{2} \end{matrix}$$

Y ahora estamos en el mismo caso que en el ejemplo anterior:

$$Si\;\cos\alpha = 1 \;\rightarrow\; \alpha_1 = 0^o + 360 \cdot k \,, con\; k \in \mathbb{Z}$$

$$Si\;\cos\alpha = \frac{-1}{2} \begin{cases} \alpha_2 = 120^o + 360^o \cdot k \\ \alpha_3 = 210^o + 360^o \cdot k \end{cases}, con\; k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 3: Cuando tenemos varias razones trigonométricas.

$$sen\, x \cdot \cos x + 2\cos x \;=\; 0$$

En algunos casos tendremos varias razones trigonométricas.
Aquí tendremos que realizar transformaciones como vimos en el apartado anterior para obtener tan solo una razón trignométrica (y estaríamos en los ejemplos anteriores) o conseguir una ecuación factorizada sacando factor común. Este último método es el que vamos a emplear, sacando factor común cos x.

$$\cos x\,(sen\, x + 2) \;=\; 0$$

Ahora tenemos dos posibilidades:

$$\cos x \;=\; 0$$

$$sen\, x + 2 \;=\; 0$$

Si $\cos x \;=\; 0$ la solución es directa: $\begin{cases} x_1 = 90^o + 360^o \cdot k \\ x_2 = 270^o + 360^o \cdot k \end{cases}, con\; k \in \mathbb{Z}$

Si $sen\, x + 2 \;=\; 0$ eso significa que $sen\, x \;=\; -2$. Y eso no es posible, por lo que esta parte no tiene solución.

9-. Resolver triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo consiste en hallar la medida de **todos sus lados** y **todos sus ángulos**.

Para resolverlo podemos utilizar:

- Teorema de Pitágoras
- La suma de todos los ángulos de un triángulo es 180º
- Razones trigonométricas de los ángulos (seno, coseno, tangente)

No hay un camino único.

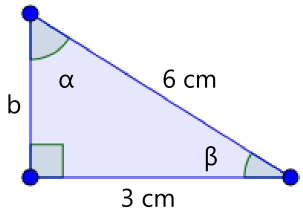
Para resolver **problemas** en los que tengas que aplicar la trigonometría no te olvides de **dibujar el triángulo con los datos que tienes**.

En los problemas no siempre tendrás que calcular todos los elementos de un triángulo. Intenta buscar el camino más rápido para obtener lo que necesitas.

Vamos a ver varios ejemplos:

Si conocemos dos lados:

Ejemplo: Resuelve el siguiente triángulo rectángulo.



Como conocemos dos lados (la hiptenusa y un cateto) podemos utilizar el teorema de pitágoras para obtener el otro lado.

$$6^2 = b^2 + 3^2$$
$$b^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$$
$$b = \sqrt{27} = 5{,}19\ cm$$

Ahora vamos a calcular uno de los ángulos. Vamos a calcular α aunque también podríamos calcular β. Para ello utilizaremos las razones trigonométricas. Como conocemos todos los lados da igual cual utilicemos. Por ejemplo utilizaremos el seno.

$$sen\ \alpha = \frac{3}{6} = 0{,}5 \qquad \alpha = arcsen\ 0{,}5 = 30\ ^o$$

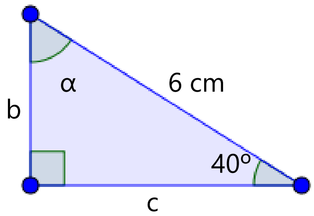
NOTA: También podríamos haber sacado β utilizando las razones trigonométricas. No hay un único camino para resolver estos problemas.

Por último como la suma de todos los ángulos tiene que ser 180º sacamos β fácilmente.

$$180\ ^o = 90\ ^o + 30\ ^o + \beta \qquad \beta = 180\ ^o - 90\ ^o - 30\ ^o = 60\ ^o$$

Si conocemos un lado y un ángulo

Ejemplo: Resuelve el siguiente triángulo rectángulo.



En este caso solo conocemos un lado por lo que no podemos aplicar pitágoras. Pero al conocer el valor de uno de los ángulos podemos sacar rápidamente el otro.

$$180\ ^o = 90\ ^o + 40\ ^o + \alpha \qquad \alpha = 180\ ^o - 90\ ^o - 40\ ^o = 50\ ^o$$

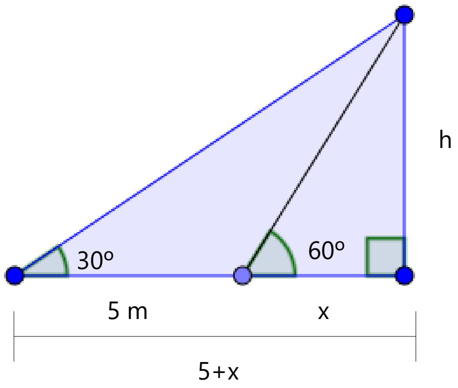
Para obtener el valor de alguno de los catetos debemos utilizar las razones trigonométricas. De nuevo tenemos varias posibilidades. Si queremos obtener c podríamos usar el coseno de 40º (o el seno de 50º).

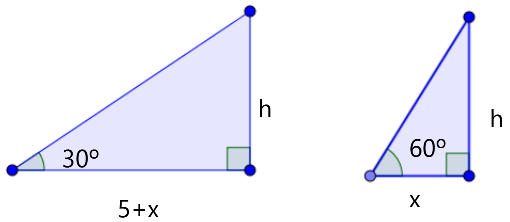
$$cos\ 40\ ^o = \frac{c}{6} \qquad 0{,}766 = \frac{c}{6} \qquad c = 0{,}766 \cdot 6 = 4{,}59\ cm$$

Por último podemos emplear de nuevo las razones trigonométricas o aplicar Pitágoras.

$$6^2 = b^2 + 4{,}59^2$$
$$b^2 = 6^2 - 4{,}59^2 = 36 - 9 = 14{,}93$$
$$b = \sqrt{14{,}93} = 3{,}86\ cm$$

Problema de doble observación (doble tangente):





En este tipo de problemas debemos resolver un **sistema de ecuaciones** para hallar el dato que nos piden (en este caso la **altura h**). Estos problemas pueden venir dados de diferentes formas pero su resolución es siempre similar:

$$\begin{cases} tg\,30^o = \dfrac{h}{x+5} \\ tg\,60^o = \dfrac{h}{x} \end{cases} \longrightarrow h = x \cdot tg\,60^o = 1{,}73\,x$$

$$0{,}577 = \frac{1{,}73\,x}{x+5}$$
$$0{,}577\,(x+5) = 1{,}73\,x$$
$$0{,}577\,x + 2{,}885 = 1{,}73\,x$$
$$x = 2{,}502\,m$$

$$h = 2{,}502 \cdot tg\,60^o = 4{,}33\,m$$

Continuará...