TEMA 11: ECUACIONES DE RECTAS Y PLANOS.

11.1 Lugares geométricos.
11.2 Ecuaciones de la recta.
11.3 Ecuaciones del plano.

11.1 Lugares geométricos.

a) Coordenadas de un vector. Sean A y B dos puntos arbitrarios del espacio vectorial, cuyas coordenadas son A=(x,y,z) y B=(x´,y´,z´), afirmamos que el vector $\overrightarrow{AB}$=(x´-x,y´-y,z´-z) ya que $\overrightarrow{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$

Ejercicio 1(78): Sabiendo que $\overrightarrow{AB}$= (-2, 0, 3) y el origen A = (1, -2, 3). Calcular las coordenadas del extremo A.

Ejercicio 2: Sabiendo que A=(1,0,0), B=(2,-1,0), C=(0,0,1) y D=(x,y,z). Calcular D para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean equipolentes.

b) Coordenadas del punto medio. Sean los puntos A y B los extremos de un segmento. Si M es el punto medio de A y B se tiene que sus coordenadas son $M=\frac{A+B}{2}=\frac{(x+x',y+y',z+z')}{2}$. Ya que $\vec{m}=\vec{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

c) Coordenadas de los puntos que dividen a un segmento en tres partes iguales. Calcular los puntos P y Q que dividen al segmento de extremos A y B en tres partes iguales.

P → $\vec{p}=\vec{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Q → $\vec{q}=\vec{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Ejercicio 3 (83): Dado el segmento de extremos A = (2, 1, -1) y B = (5, -2, 8):

a) Calcular las coordenadas de C de forma que B sea el punto medio del segmento AC.
b) Calcular las coordenadas de dos puntos P y Q pertenecientes al segmento AB y tales que dividan a este en tres segmentos de igual longitud.

d) Coordenadas del baricentro de un triángulo. Dado un triángulo de vértices A, B y C, las coordenadas del baricentro G son

$G=\frac{A+B+C}{3}=\frac{(x+x'+x'',y+y'+y'',z+z'+z'')}{3}$ ya que

$$\vec{g}=\vec{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\frac{2}{3}(\vec{m}-\vec{a})=\vec{a}+\frac{2}{3}(\vec{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\vec{a})=\vec{a}+\frac{2}{3}(\vec{b}+\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})-\vec{a})=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

e) Coordenadas del baricentro de un tetraedro. Sea el tetraedro formado por los puntos A, B, C y D, las coordenadas de G son: $G=\frac{A+B+C+D}{4}$ ya que

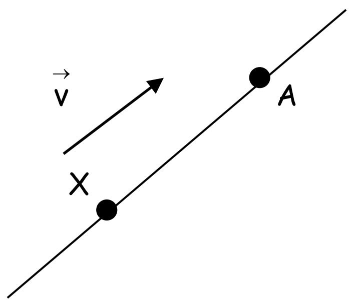
$\vec{g} \;=\; \vec{a}+\overrightarrow{AG} \;=\; \vec{a}+\frac{3}{4}\,\overrightarrow{AG'} \;=\vec{a}+\frac{3}{4}(\vec{g'}-\vec{a})=\vec{a}+\frac{3}{4}(\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})-\vec{a}) \;=\vec{a}+\frac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})-\frac{3}{4}\vec{a}$
$=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$

Ejercicios página 298: Del 77 al 83, en clase 78, 83

11.2 Ecuaciones de la recta.

Una recta r en el espacio queda determinada por un punto $A=(a_1, a_2, a_3)$ y un vector, no nulo, $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$ llamado **vector director**, o bien, queda determinada por dos puntos distintos B y C del espacio vectorial (siendo el vector director $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$). Una recta tiene "infinitos" vectores directores, podemos utilizar $\vec{v}$ o cualquier proporcional a él.

Sea X un punto, si $X = (x,y,z) \in r$ entonces:



$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\,\vec{v} \quad \lambda \in \Re$ **E. Vectorial**

Utilizando las coordenadas obtendríamos:

$$\left.\begin{array}{l} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 \end{array}\right\}$$ **Ecuaciones paramétricas de la recta**

Despejando el parámetro λ, $\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}=\frac{z-a_3}{v_3}$ **Ecuaciones continuas de la recta**

Nos falta las **ecuaciones generales** o **implícitas de la recta**, para ello utilizaremos un ejemplo concreto:

Ejercicio 4: Calcula las distintas ecuaciones de la recta r sabiendo que pasa por el punto $A=(-1,2,-3)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (2, 4, -5)$.

Ejercicio 5: Calcula las ecuaciones generales de los ejes de coordenadas:

Eje OX: $\left.\begin{array}{l} y=0 \\ z=0 \end{array}\right\}$ Eje OY: $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ z=0 \end{array}\right\}$ Eje OZ: $\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x=0 \end{array}\right\}$

Ejercicio 6: Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A=(1,2,3)$ y lleva la dirección determinada por el vector libre $\vec{u}=(-2,1,0)$, en forma vectorial, paramétrica, continua y general.

Ejercicio 7(84 a): Hallar la recta que pasa por los puntos $A = (1, -2, 0)$ y $B = (2, -3, -1)$.

Ejercicio 8(86 modificado): Calcula dos puntos de cada recta, un vector director, exprésalas como ecuación paramétrica, continua y generales y además averigua si los puntos A = (3, -6, 4) y B = (3, 3,3) pertenecen a alguna o varias de las rectas:

a) $\left.\begin{array}{l} x=-2+2t \\ y=-1+t \\ z=-1+2t \end{array}\right\}$ b) $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-2}$ c) $\left.\begin{array}{l} x-2y+z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{array}\right\}$

Ejercicio 9: Averiguar si los puntos indicados están alineados. **Varios puntos son colineales si, y solo si, dichos puntos están en una misma recta. Son colineales si el rango de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ es 1**:

a) A=(-1,0,0), B=(2,1,2), C=(1,1,0) y D=(3,2,0).
b) (93a) A=(2,-1,2), B=(3,0,3) y C=(4,1,4)

Ejercicios del libro: página 298, ejercicios: del 84 al 93. En clase: 84a, 86, 93a.

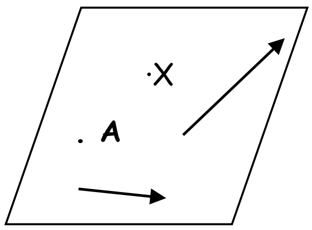
11.3 Ecuaciones del plano.

Un plano π está determinado:

1) Por un punto A y dos vectores, no nulos, linealmente independientes. Llamados **vectores directores del plano**. Se dice que la terna $\pi(A,\vec{u},\vec{v})$ es una determinación lineal del plano.
2) Por tres puntos no alineados.
3) Por un punto y un vector normal (perpendicular) al plano.

Por ser X un punto del plano se verifica que:

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} \qquad \lambda,\mu\in\Re$$ **E. Vectorial**



Siendo X = (x, y, z) un punto cualquiera del plano, A = (a_1, a_2, a_3), y $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ sus vectores directores.

Sustituyendo las coordenadas obtenemos las **ecuaciones paramétricas:**

$$\left.\begin{array}{l} x=a_1+\lambda u_1+\mu v_1 \\ y=a_2+\lambda u_2+\mu v_2 \\ z=a_3+\lambda u_3+\mu v_3 \end{array}\right\} \lambda,\mu\in\Re$$

Puesto que los vectores $\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes, det($\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$) = 0,

es decir, $\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$ = 0, al efectuar el determinante se obtiene una ecuación es de la forma: Ax + By + Cz + D = 0 llamada **ecuación general del plano** o **implícita**. Hay que destacar que el vector $\vec{n}$ =(A, B, C) es el vector perpendicular al plano.

Ejercicio 10(94a): Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A=(-1,3,1) y sus vectores directores son $\vec{u}$=(1,-1,3) y $\vec{v}$=(-1,-1,4).

Ejercicio 11(94b): Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos A=(1,-1,2), B=(2,0,-1) y C=(-3,1,0).

Ejercicio 12(97b modificado): Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A=(0,0,0) y cuyo vector normal es $\vec{n}$=(3,-1,-2).

a) Calcular la ecuación general del plano.
b) Calcula dos puntos del plano.
c) Calcula dos vectores directores.

Ejercicio 13: Varios puntos son **coplanarios** si, y solo si, están en un mismo plano. Para que sean coplanarios es necesario que el rango de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$ es dos. Averigua si lo siguientes vectores son o no coplanarios:

a) A=(1,2,3), B=(4,7,8), C=(3,5,5), D=(-1,-2,-3) y E=(2,2,2).
b) (101a) A=(2,1,-5), B=(1,0,-2), C=(-1,2,0) y D=(-2,0,5)

Ejercicio 14: Hallar las ecuaciones de los planos cartesianos.

Ejercicio 15: Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos A=(3,2,-1) y B=(4,0,2) y es perpendicular al plano π: x - 5y + 2z – 6 = 0.

Ecuación segmentaria del plano. Un plano π no paralelo a ninguno de los tres ejes y que no pasa por el origen, corta a los ejes en tres puntos. Dichos puntos junto con el origen forman un tetraedro. Sean A=(a,0,0), B=(0,b,0) y C=(0,0,c) dichos puntos. La ecuación segmentaria quedaría de la forma:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Ejercicio 16: Hallar la ecuación en forma segmentaria del plano que pasa por los puntos A=(2,0,0), B=(0,-1,0) y C=(0,0,7). Calcula el volumen del tetraedro determinado por el plano y los planos coordenados.

Ejercicio 17: Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A=(2,0,5) y contiene a la recta r: $\frac{x-1}{2}=-y+1=\frac{2z+4}{6}$.

Ejercicio 18: Hallar la ecuación del plano π que pasa por el origen y contiene a la recta s:
$$\left.\begin{array}{l} x=2+3t \\ y=1-5t \\ z=6+2t \end{array}\right\}$$

Ejercicios del libro: página 298, ejercicios: del 94 al 102. En clase: 94a,94b, 97b, 101a