TEMA 1: LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

1.1 Concepto de función real.
1.2 Límite de una función en un punto. Límite de una función cuando x . Cálculo de dichos límites.
1.3 Continuidad de una función y asíntotas.
1.4 Teoremas: de Bolzano y de Weierstrass.

1.1 CONCEPTO DE FUNCIÓN REAL.

Se llama **intervalo abierto** (a, b) al conjunto de números reales comprendidos entre a y b. (a, b) = {x∈IR / a < x < b}. Se llama **entorno** de centro a y radio r, y se denota por E(a, r), al conjunto de números reales que distan de a menos que r, es decir,

E(a, r) = {x∈IR / d(x,a)< r } = {x∈IR / $|x-a|<r$ } = {x∈IR / -r $<x-a<r$ }.

Se llama **entorno reducido** de centro a y radio r, y se denota por E*(a, r), al conjunto de números reales distintos a "a" y que distan de a menos que r, es decir, E*(a, r) = {x∈IR / 0 < d(x, a) < r con x≠a} = {x∈IR / 0 < $|x-a|<r$ }.

Función real de variable real es toda ley (aplicación, correspondencia) que asocia a cada elemento de un determinado subconjunto A de números reales otro número real único. f: IR → IR. El subconjunto de todos los valores reales para los que existe la imagen se llama **dominio** y se denota por Domf o D(f). Dado x∈Domf se le llama **variable independiente** y al número y = f(x) se le llama **variable dependiente**. Se llama **recorrido** de una función al conjunto de los valores reales que toma la variable y. Se denota por R(f), o bien, Imf. **Dos funciones reales** f y g **son iguales** si tiene el mismo dominio y se verifica que f(x) = g(x) para todo x∈Domf. La **gráfica** de la función f es el lugar geométrico de los puntos (x,y) del plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación y=f(x).

Ejercicio 1: Representa las siguientes funciones: y = Ln (x), y = x^2 - 4, y = $(\frac{1}{2})^x$

Ejercicio 2: Calcula el dominio y el recorrido de las siguientes gráficas (las gráficas se darán en clase)

Ejercicio 3: Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + x - 1}$ b) $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{5x^2+1}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3+x^2-x-1}$ d) $f(x) = Ln(5 - x^2)$

e) $g(x) = \sqrt{3-x}$ f) $h(x) = \dfrac{\sqrt{3-x}}{x^2-1}$

g) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x+2} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{2-x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ h) $f(x) = \dfrac{1}{Lnx - 1}$

Ejercicio 4: Dadas las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1-5x}{6}$ b) $g(x) = \dfrac{3-7x}{1-2x}$ c) $h(x) = \dfrac{1-x}{x}$

d) $i(x) = \sqrt[3]{x-2}$ e) $j(x) = -3x^2 + 27$ f) $k(x) = Ln\,(x^2 - 4)$

g) $l(x) = e^x$

Calcula

1) 1/h 2) g + h 3) g : h 4) i o h 5) h o i 6) l o k

Ejercicio 5: Calcula las inversas de las funciones del ejercicio 4, ten en cuenta que quizás debas restringir el dominio.

1.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN CUANDO x . CÁLCULO DE DICHOS LÍMITES.

Recordarles el sentido de un límite haciéndoles ver que significa en una gráfica y viendo la diferencia entre límite e imagen con la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-x} & \text{si } x > -1 \\ 5 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}.$$

Se dice que el **límite de una función f** cuando x tiende a "a" es el número real L en el punto x = a, si para todo número real > 0, existe otro número real > 0, tal que si 0 < x - a< entonces f(x) - L< . Se denota por $f\,(x) \;=\; L$.

PROPIEDADES que verifican los <u>límites finitos</u> (en un punto o laterales):

1. El límite de una función en un punto es único.
2. Si existe el límite de una función f en un punto a, f está acotada en un entorno reducido de a.
3. Si existe el límite de una función f en un punto a, y es distinto de cero en un punto, entonces existe un entorno reducido de a en el que la función tiene el mismo signo que el límite.
4. Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L'$, con L < L´, entonces existe un entorno reducido de a en que f(x) < g(x).
5. Si los límites laterales $\left(\lim_{x \to a^+} f(x)\,,\ \lim_{x \to a^-} f(x)\right)$ de una función en un punto son distintos, entonces la función no tiene límite en dicho punto.
6. $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
7. $\lim_{x \to a} (fg)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \,.\, \lim_{x \to a} g(x)$ A la propiedad 6 y 7 se le llama linealidad.
8. $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$
9. $\lim_{x \to a} (g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x))$ g(x)= $\sqrt{x}$, log(x), senx, cosx, tagx,..., teniendo en cuenta las peculiaridades de la raíz de índice par y del logaritmo.
10. $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x)^{\lim_{x \to a} g(x)}$ si f(x) > 0

Las propiedades arriba descritas para límites finitos no siempre se resuelvan para limites infinitos, como consecuencia surgen así las indeterminadas: 0/0, o.∞, ∞-∞, 1^{∞}, ∞/∞, ∞^{0}, 0^{0}.

Ejercicio 6: Sabiendo que $\lim_{x\to 2} p(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 2} q(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 2} s(x) = 0$ di, en los casos que sea posible, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2}\dfrac{s(x)}{p(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

b) $\lim_{x\to 2}\left[s(x)\,.\,q(x)\right] = 0x(-\infty) = \text{Ind}$

c) $\lim_{x\to 2} s(x)^{p(x)} = 0^{+\infty} = 0$

d) $\lim_{x\to 2}\left[p(x) - 2q(x)\right] = +\infty$

**** Darles el resumen de límites incompleto, que lo rellenen y lo comparen con el completo, mostrándolo en la pizarra.

Ejercicio 7: Para practicar utilizar mi hoja de ejercicios y dejamos los del libro para repaso.

Ejercicio 8: Calcula, si existe, el límite en x = 0 de la función:

f(x) = $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Representa y calcula la asíntota vertical.

Ejercicio 9: Determina el valor de a para que se verifique $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x\right) = 2$.

Ejercicio 10: Calcula $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1+|x|}$.

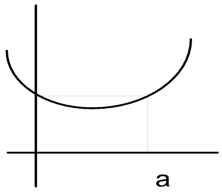
Ejercicio 11: Comprueba que $\lim_{x\to +\infty}\left[Ln(x+1) - Lnx\right] = 0$.

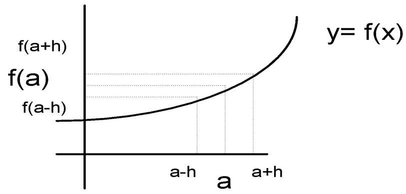
Ejercicio 12: Calcula el límite de las siguientes funciones cuando x ->+∞ y cuando x->-∞, definiéndolas previamente por intervalos.

a) f(x) = $|x-3| - |x|$ b) f(x) = $|2x-1| + x$ c) f(x) = $\dfrac{x+1}{|x|}$

d) f(x) = $\left|x^2 - 4\right| + x$

1.3 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN Y ASÍNTOTAS.





La idea intuitiva de continuidad consiste en que a pequeñas variaciones de "a" (es decir h 0) se tiene pequeñas variaciones de f(a).

Una función **f es continua en un punto a** si existe límite en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto. Es decir, f es continua en x = a $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si una función f **no es continua** en un punto x = a diremos que es discontinua en dicho punto. (*puede fallar la existencia de la imagen, del límite o la coincidencia de ambos*).

Las operaciones con funciones continuas en x = a, mantienen la continuidad siempre que tenga sentido la operación. Es decir, si f y g son continuas en "a" entonces f + g, f-g, f . g, f/g con $g(a) \neq 0$ y gof son continuas en "a" (se deriva de las propiedades de los límites). De estas propiedades deducimos que las funciones polinómicas, racionales (en su dominio), exponencial, logaritmo, seno, coseno, tangente, valor absoluto y f(x) = $\sqrt[n]{x}$ son continuas en su dominio.

Las discontinuidades se pueden clasificar:

a) Una función tiene una discontinuidad **evitable** en un punto cuando existe límite en él pero no coincide con la imagen o la imagen no existe.

b) Una función tiene una **discontinuidad de salto finito** en un punto cuando existen (el límite es un nº real) los límites laterales pero no coinciden.
c) Una función tiene una **discontinuidad de salto infinito** en un punto x=a cuando uno o los dos límites laterales tienden a infinito.

Antes de realizar un ejercicio de continuidad, repasaremos el estudio de las asíntotas, de esta forma realizaremos un ejercicio más completo.

Tenemos tres tipos de asíntotas:

a) Hay una **asíntota vertical** en x = a si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, o bien uno de los límites laterales.

b) Hay una **asíntota horizontal** en y = k si $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$. Si una función no tiene a. horizontal, hay que estudiar la posibilidad de que exista **asíntota oblicua.**

c) Si una función f tiene una asíntota oblicua será de la forma y = mx + n siendo $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ y $\lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = n$. Si la función f es una función racional, la asíntota oblicua se puede calcular dividiendo numerador entre denominador. Debemos tener en cuenta que si hay asíntota horizontal ya no puede existir la oblicua, pero es posible que exista una a. h. cuando x -> +∞ y una a. o. cuando x-> -∞, o bien, dos asíntotas horizontales distintas. Suele ocurrir en las funciones definidas a trozos y en las exponenciales.

Ejercicio 13: Estudia la continuidad y asíntotas de las siguientes funciones:

a) f(x)= $\frac{2x+1}{5x+10}$

b) f(x) = $\frac{x+3}{x^2-1}$

c) f(x) = $\frac{x^2-4}{x+2}$

d) f(x) = $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

e) f(x)= $\frac{4-x^3}{x^2}$

f) f(x) = $\begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x-4}{x-2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

g) f(x) = $\begin{cases} 2x-3 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

h) f(x) = $\frac{x+1}{|x|}$

i) f(x) = e^{2x-1}

j) f(x) = $\begin{cases} 2^x & \text{si } x < 0 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

k) f(x) = $\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

l) f(x) = $\frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$

m) f(x) = sen (1/x)

n) f(x) = 4 – Lnx

Ejercicio 14: Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) f(x) = $\frac{x-2}{x^2-4}$

b) f(x) = $\frac{x^2-1}{x-1}$

c) f(x) = $\begin{cases} x+1 & si\ x \le 0 \\ x^2 & si\ x > 0 \end{cases}$

d) f(x) = $\begin{cases} e^x & si\ x \ge 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{x} & si\ x < 0 \end{cases}$

e) f(x) = $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2-1} & si\ x > 1 \\ 2x - 3 & si\ x \le 1 \end{cases}$

f) f(x) = $\dfrac{3x^2 - x}{x^3 - 1}$

g) f(x) = $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{2-x}}{x}$

h) f(x) = $\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si\ x < -1 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2} & si\ x \ge -1 \end{cases}$

i) f(x)= E(x) = mayor entero menor o igual que x

Ejercicio 15: Estudia para qué valores de a y/o b son continuas en IR estas funciones:

a) f(x) = $\begin{cases} ax^3 - 3x^2 + ax + 2 & si\ x < -1 \\ x^2 - ax^2 + 1 & si\ x \ge -1 \end{cases}$

b) f(x) = $\begin{cases} 1 + a^x & si\ x \le 0 \\ Ln(x^2 + a) & si\ x > 0\ (a > 0) \end{cases}$

c) f(x) = $\begin{cases} \dfrac{1+|x|}{1-x} & si\ x < -1 \\ a & si\ x = -1 \\ \dfrac{-2 + 2\sqrt{x+2}}{x+1} & si\ x > -1 \end{cases}$

d) f(x) = $\begin{cases} \dfrac{(x+1)^2 - 1}{x} & si\ x \ne 0 \\ a & si\ x = 0 \end{cases}$

e) f(x) = $\begin{cases} -x^2 + ax + b & si\ x > 0 \\ 5 + 2senx & si\ x \le 0 \end{cases}$

f) f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x} & si\ x \le 2 \\ 2x + a & si\ x > 2 \end{cases}$

Ejercicio 16: Dada la función f(x) = $\dfrac{x^2 - x - b}{2x^3 - ax^2 - 2x}$, averigua a y b sabiendo que en x = 2 la función presenta un discontinuidad evitable. A continuación, calcula y clasifica las demás discontinuidades.

Ejercicio 17: Calcula los valores de a y b para que la siguiente función sea continua para todo valor de x: $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x<0 \\ x^2+2a\cos x & \text{si } 0 \le x < \pi \\ ax^2+b & \text{si } x \ge \pi \end{cases}$

1.4 TEOREMAS: DE BOLZANO, DE LOS VALORES INTERMEDIOS Y DE WEIERSTRASS.

(Teorema del signo) Teorema de la conservación del signo en un entorno: Si una función f es continua en a y f(a) $\neq$ 0, entonces existe un entorno de a en que la función tiene el mismo signo que f(a).

Una función f es continua en un intervalo cerrado [a,b] si se verifica que f es continua en (a,b) , $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Ejercicio 18: Estudia la continuidad de las siguientes funciones en el intervalo indicado:

a) $f(x) = \frac{1-x}{x+1}$ en el intervalo [- 2,0] b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{e^x} & \text{si } x \ge 0 \\ \cos x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ en [- π ,0]

<u>Teorema de Bolzano</u>: Si una función f es continua en un intervalo [a, b] y toma valores de signos opuestos en los extremos (f(a) . f(b) < 0), entonces existe al menos un número real c $\in$ (a,b) en el que f(c) = 0.

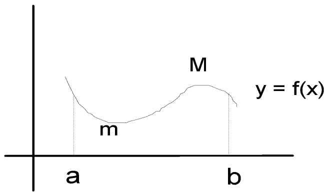
Ejercicio 19: Utiliza el teorema de Bolzano para demostrar que el polinomio x^4- $4x^3$ – 1 tiene alguna raíz real negativa (*que vean que no se puede factorizar por Ruffini).*

Ejercicio 20: Enuncia el teorema de Bolzano y utilízalo para demostrar que la ecuación $x^3 + x^2 - 7x + 1 = 0$ tiene una solución en el intervalo [0,1]. Aproxímalo a las décimas.

Ejercicio 21: Demuestra que existe al menos un número real, x, para el que se verifica sen x = x – 2.

Ejercicio 22: Demuestra que las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = 1/x$ se cortan en un punto $x > 0$.

<u>Teorema de Weierstrass. (Th del máximo y mínimo)</u>: Si una función es continua en un intervalo cerrado [a, b], entonces f tiene máximo y mínimo absoluto en dicho intervalo.



Ejercicio 23: Sea f una función acotada en [a,b]. ¿Significa que f es continua en [a,b]? Razona tu respuesta.

Ejercicio 24: Di qué funciones están acotadas en el intervalo indicado:

a) $f(x) = e^x$ en [0,1]

b) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en [-1,1]

c) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ en [-1,1]

d) $f(x) = \frac{Lnx}{x+1}$ en [0,e]