Unidad 2: Potencias, radicales y logaritmos.

2.1 Potencias de exponente natural y entero.
2.2 Radicales de índice n.
2.3 Operaciones de los radicales.
2.4 Racionalización.

2.1 Potencias de exponente natural y entero.

Una potencia a^n, con a base un número real y n exponente un número natural como un producto de n factores iguales a la base. $a^n = a.a.....a$. Además definimos $a^0 = 1$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Pero, para el cálculo de potencias, necesitamos recordar las siguientes propiedades:

1) Producto de potencias de la misma base $a^m . a^n = a^{m+n}$
2) Cociente de potencias de la misma base $a^m : a^n = a^{m-n}$
3) Potencia de una potencia $(a^m)^n = a^{nm}$
4) Potencia de un producto $(a . b)^n = a^n . b^n$
5) Potencia de un cociente $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
6) Potencia de un cociente de exponente negativo $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
7) $a^1 = a$
8) $(-1)^n = \begin{cases} 1 \text{ si n es par} \\ -1 \text{ si n es impar} \end{cases}$

Ejercicio 1: Efectúa las siguientes potencias utilizando las propiedades, el resultado se expresa en forma de potencia con exponente positivo:

$2^6 . 2^2 =$	$2^3 . 2 =$	$2^7 . 2^{-2} =$
$3^{-1} . 3^5 =$	$5^3 . 5^{-5} =$	$7^{-3} . 7^{-2} =$
$2^{-1} . 2^{-5} =$	$2^{-3} . 2^{-4} =$	$2^6 : 2^2 =$
$2^3 : 2 =$	$2^2 : 2^2 =$	$2^8 : 2^4 =$
$(2^2)^3 =$	$(3^2)^5 =$	$(4^{-1})^2 =$
$(5^3)^{-2} =$	$(7^{-2})^{-3} =$	$(12)^3 =$
$(75)^{-2} =$	$[(24)^3]^2 =$	$(3^3.2^{-1})^3 =$

$(5^{-2} .3^3)^2 =$ $\qquad$ $2^3 . 2^{-2} . 2^5 =$

$2^3 . 5^{-3} . 2 . 5^2 =$ $\qquad$ $3^2. 2^{-1}. 3^3.2^{-3} . 3^{-5} =$

$\frac{2^3 . 3^2 . 2^{-1}}{2 . 3^5} =$ $\qquad$ $\frac{2^3 . 5^2 . 3^{-1}}{2^{-1} . 5^3} =$

$$\frac{3^2 \cdot 5^{-1} \cdot 3^{-3}}{2 \cdot 5^{-2} \cdot 3^2} = \qquad \frac{14 \cdot (18)^{-2} \cdot 25}{(75)^2 \cdot 63} =$$

$$\frac{6^3 \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-1}}{(-9)^2 \cdot 12} = \qquad \frac{(-75)^3 \cdot 125^{-1} \cdot 36}{60^{-2} \cdot 5^0 \cdot 2^3} =$$

Ejercicio 2: Sustituye los asteriscos por los números necesarios para que se verifique las siguientes igualdades:

$2^3 \cdot 2^* = 2^8$ $\quad 5^4 \cdot 5^* \cdot 5^2 = 5^{10}$ $\quad 8^6 \cdot x^6 = 2^6$

$3^4 \cdot x^2 = 3^2$ $\quad 4^5 \cdot x^5 = 12^5$ $\quad (3^*)^5 = 3^{20}$

Ejercicio 3: Pasar a forma de potencia los siguientes números:

a) 243, - 625, 9, 1/49, 1/8, 1/25, 1, - 1/121
b) En potencia de base 10, 100, 1000, 10.000, 1.000.000, - 100, 0´01, 0´001, 0´0001, 0´000000001.

Ejercicio 4: Investiga la historia del inventor del ajedrez se lo mostró al rey Shirham, en la india, el cual quedó entusiasmado con el juego que le ofreció regalarle lo que le pidiera. Puedes mirar en http://matematicascercanas.com/2014/03/10/la-leyenda-del-tablero-de-ajedrez-y-los-granos-de-trigo/

Ejercicio 5: Efectúa:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} =$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

c) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

d) $\left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-6} =$

e) $\left(\frac{-3}{2}\right)^{-2} =$

f) $\left(\frac{-3}{2}\right)^{0} =$

g) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} =$

h) $\left[\left(\frac{-3}{2}\right)^{-2}\right]^3 =$

i) $-\left(\frac{-3}{2}\right)^{-4} =$

2.2 Radicales de índice n.

Se define la **raíz enésima** de un número “a” como un número real “b” cuya potencia enésima es “a”.

$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$ *Indicar el índice y radicando*

Observaciones:

1) No existe la raíz de índice par de un número negativo, por ejemplo $\sqrt[4]{-16} = ¿?$ $\Leftrightarrow$ $x^4 = -16$
2) La raíz enésima no es más que una potencia con exponente en forma de fracción: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
3) Tener en cuenta que $\sqrt[2]{3^2} = 3$, decimos que "se va la raíz", o bien que el 3 sale fuera

Propiedades:

a) Producto de raíces: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

b) División de raíces: $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$

c) Potencia de una raíz: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

d) Raíz de una raíz: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

Ejercicio 5: Calcula el valor de las siguientes raíces: $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[3]{216}$, $\sqrt[4]{48}$, $\sqrt[4]{-16} - \sqrt{49}$, $\sqrt[3]{-125}$, $\sqrt{900}$, $\sqrt[20]{-1}$, $\sqrt[4]{-2}$, $-\sqrt[4]{1296}$, $\sqrt{\frac{9}{4}}$, $\sqrt[20]{1}$

Ejercicio 6: Expresa en forma de potencia: $\sqrt[5]{2^3}$ $\sqrt[7]{(-2)^5}$ $\sqrt[3]{5^4}$ $\sqrt[7]{4^3}$

Ejercicio 7: Expresa las siguientes potencias de exponente fraccionario en forma de radicales: $2^{5/3}$ $(-3)^{3/7}$ $4^{6/5}$ $7^{4/3}$ $7^{-4/3}$

2.3 Operaciones con radicales.

a) Producto de raíces: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

Ejercicio 8: Multiplica las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$
b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$
c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$
d) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$
e) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{9}$
f) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{18}$
g) $\sqrt[4]{25} \cdot \sqrt[4]{25}$
h) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{25}$
i) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{18}$
j) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{6}$
k) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{12}$
l) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$

Ejercicio 9: Multiplica las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$
b) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3}$
c) $\sqrt[6]{5} \cdot \sqrt[3]{5}$
d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}$
e) $\sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[4]{3^3}$
f) $\sqrt[6]{5^5} \cdot \sqrt[3]{5^2}$
g) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{8}$
h) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{27}$
i) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{8}$
j) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3^2}$
k) $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{2}$
l) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{34} \cdot 3\sqrt{12}$

m) $\sqrt[4]{8}\ .\ \sqrt[4]{2}$ n) $\sqrt[3]{2^5}\ .\sqrt[4]{2^3}$ ñ) $2\sqrt{3}\,.\,3\sqrt{2}\,.\,8\sqrt{6}$

o) $-2\sqrt[3]{3}\,.\,(-3)\,.\,2\sqrt[3]{9}$

Ejercicio 10: Introduce el factor dentro de la raíz:

$2\sqrt{3}$, $2\sqrt[3]{3}$, $2^4\sqrt[3]{6}$, $5^2\sqrt[4]{2}$, $6\sqrt{3}$, $xy\sqrt{2}$, $xy^2\sqrt{3}$, $2^3\sqrt[4]{3}$

b) División de raíces: $\sqrt[n]{a}\ :\ \sqrt[n]{b}\ =\sqrt[n]{a:b}$

Ejercicio 11: Divide las siguientes raíces:

a) $\sqrt{12}\ :\sqrt{2}$ b) $\sqrt[3]{54}\ :\ \sqrt[3]{2}$ c) $\sqrt{18}\ :\sqrt{2}$

d) $\sqrt{12}\ :\ \sqrt[3]{2}$ e) $\sqrt{54}\ :\ \sqrt[3]{2}$ f) $\sqrt{18}\ :\ \sqrt[3]{2}$

g) $\sqrt{256}\ :\sqrt{729}$ h) $\sqrt{216}\ :\sqrt{2}$ i) $\sqrt[3]{625}\ :\ \sqrt[3]{5}$

j) $\sqrt[4]{8}\ :\ \sqrt[6]{8}$ k) $\sqrt[6]{27}\ :\ \sqrt[4]{9}$ l) $\sqrt[6]{125}\ :\ \sqrt[4]{25}$

c) Potencia de una raíz: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$ $\left(\sqrt[n]{a^p}\right)^m=\sqrt[n]{a^{p.m}}$

Ejercicio 12: Efectúa las siguientes potencias: $\left(\sqrt{5}\right)^3$ $\left(\sqrt{5^2}\right)^3$ $\left(\sqrt[3]{2^2}\right)^4$

Ejercicio 13: Hallar el cuadrado de los siguientes números, expresando las potencias de exponente racional en forma de raíz: $2\sqrt{3}$, $2.3^{\frac{1}{3}}$, $2^4\sqrt[3]{2}$, $5^2.\ 2^{\frac{1}{4}}$, $a.\sqrt{5}$

d) Raíz de una raíz: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n.m]{a}$

Ejercicio 14: Expresa como una única raíz:

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$ c) $\sqrt{\sqrt{2^3}}$

d) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{2^5}}\right)^2$ e) $\sqrt{\left(\sqrt{2^{30}}\right)^{\frac{1}{3}}}$ f) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{k}}}\right)^8$

g) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ h) $\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}\right)^6}$

e) Suma de raíces. Debes tener en cuenta que solo podemos sumar (restar) radicales que tengan el mismo índice y el mismo radicando.

Ejercicio 15: Efectúa las siguientes sumas de raíces:

a) $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-5\sqrt{2}=0$

c) $2\sqrt[3]{7}+3\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{7}$

d) $2\sqrt{2}+3\sqrt{8}=8\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}=6\sqrt{2}$

f) $\sqrt{24}-5\sqrt{6}+\sqrt{486}=6\sqrt{6}$

g) $2\sqrt[3]{5}+3\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{125}=5\sqrt[3]{5}-10$

h) $2\sqrt{3}-4\sqrt{27}+3\sqrt{12}=-4\sqrt{3}$

i) $\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{16}+4\sqrt[3]{250}=17\sqrt[3]{2}$

j) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{16}+2\sqrt{18}+3\sqrt[3]{2}=7\sqrt{2}+5\sqrt[3]{2}$

k) $2\sqrt{2}+\sqrt[3]{16}$

l) $2\sqrt{32}-5\sqrt{2}+3\sqrt{128}=27\sqrt{2}$

m) $7\sqrt{8} + \sqrt{12} - \sqrt{32} - \sqrt{75} = 18\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$

Ejercicio 16: Multiplica, debes distinguir cuando debes aplicar la propiedad distributiva y cuando debes aplicar una identidad notable:

a) $\sqrt{2}\ .(6 + 3\sqrt{2}) =$ b) $(3\sqrt{2}+\sqrt{5})(2+\sqrt{2}) =$ c) $(3+\sqrt{5})(2+\sqrt{3}) =$

d) $\sqrt{2}\ .(1 + \sqrt{3}) =$ e) $\sqrt{2}\ .\ (2\sqrt{2} - 3) =$ f) $(\sqrt{2}-3\sqrt{3})(\sqrt{2}+3\sqrt{3}) =$

g) $(\sqrt{2}+3\sqrt{3})^2 =$ h) $(\sqrt{2}+3)^2 =$ i) $(3\sqrt{2}+5)^2 =$

j) $(\sqrt{5}-3)^2 =$ k) $(2\sqrt{3}-\sqrt{5})^2 =$ l) $(2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+2) =$

m) $(2\sqrt{5}+1)(2\sqrt{5}-1) =$ n) $(-\sqrt{3}-2)(-\sqrt{3}+2) =$ ñ) $(3\sqrt{10}-4)(3\sqrt{10}+4) =$

o) $(\sqrt{5}+8)(\sqrt{5}-8) =$

Si quieres escuchar cómo se realizan estos ejercicios te aconsejo los **vídeos de youtube de 8cifras**. Son cortitos y están divididos para que puedas elegir los que te interesa: pasar a potencia, multiplicar, etc.

2.4 Racionalización de Denominadores.

Racionalizar es transformar fracciones con raíces en el denominador en fracciones sin raíces en el denominador. Tenemos que distinguir dos casos:

a) *Caso 1*: En el denominador hay una única raíz.
b) *Caso 2*: En el denominador hay una suma (o resta) de dos (o una) raíces cuadradas.

Ejercicio 17: Racionaliza las siguientes raíces del caso 1:

a) $\frac{3}{\sqrt{5}} =$ b) $\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} =$ c) $\frac{3\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} =$ d) $\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} =$

e) $\frac{5\sqrt{7}}{3\sqrt{2}} =$ f) $\frac{4\sqrt{5}}{3\sqrt{15}} =$ g) $\frac{-2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}} =$ h) $\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} =$

i) $\frac{4\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{9}} =$ j) $\frac{2\sqrt[4]{3}}{5\sqrt[4]{3^3}} =$ k) $\frac{2}{\sqrt[5]{2^3}} =$ l) $\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2}} =$

m) $\frac{3\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{12}} =$ n) $\frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{8}} =$

Ejercicio 18: Racionaliza las siguientes raíces del caso 2:

a) $\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}} =$ c) $\frac{2}{3+\sqrt{8}} =$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ e) $\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} =$ f) $\frac{6+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} =$

g) $\dfrac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} =$ h) $\dfrac{5}{2 - \sqrt{3}} =$ i) $\dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} =$ j) $\dfrac{1}{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

k) $\dfrac{12}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} =$ l) $\dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} =$ m) $\dfrac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}}$ n) $\dfrac{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 5\sqrt{2}}$

Ejercicio 19: Calcula:

a) $\dfrac{2}{2 - \sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = 0$ b) $\dfrac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} - \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{6} + 2$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 5} + \dfrac{3}{3 - 2\sqrt{2}}$