UNIDAD 2: DERIVADAS.

2.1 Derivada de una función en un punto. Función derivada.
2.2 Reglas de derivación.
2.3 Problemas.

2.1 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. FUNCIÓN DERIVADA.

Se llama **tasa de variación media** de f en el intervalo [a, b] al siguiente valor:

TVM(f,[a, b]) = $\frac{f(b)\text{-f}(a)}{b-a}$ *(Hacerles ver que es la pendiente de la recta que pasa por (a, f(a)) y (b, f(b))).*

Se llama **tasa de variación instantánea** de f en x = a al siguiente límite $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Llamado también **derivada de la función f en el punto x = a.** Se denota f´(a) y podemos escribirlo de dos formas

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

. *(Hacerle dibujo para que vean que coincide con la pendiente de la recta tangente).*

La **recta tangente a f en x = a** pasa por el punto (a, f(a)) y su pendiente es f´(a), por tanto la ecuación de la recta es: y – f(a) = f´(a) (x – a). Y en consecuencia, la **recta normal** a f en a (recta perpendicular a la recta tangente) cuya ecuación es: y - f(a) = $\frac{-1}{f'(a)}(x-a)$ m = -1/f'(a)

Ejercicio 1: Hallar la ecuación de la recta tangente y normal en el punto que se indica:

a) f(x) = $3x^2 + 8$ P(1, 11) b) f(x) = $\frac{2}{x-3}$ en x = 4

c) f(x) = $\frac{2x}{x^2-3}$ en x = 2

Al igual que en la continuidad podemos definir, se llama **derivada por la izquierda** de la función f en el punto x = a al siguiente límite si el que existe $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f_-'(a)$ ó $f'(a^-)$. Análogamente se define la derivada por la derecha. Y a ambas se les llama **derivadas laterales**. Afirmamos que una función f es derivable en x = a si $f_+'(a) = f_-'(a)$. En caso contrario se le llama **punto anguloso**.

TEOREMA: Si una función f es derivable en punto x = a entonces es continua en dicho punto.

Demostración: Para ver que es continua tenemos que probar que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ó $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$. Para ello sería suficiente ver que $\lim_{h\to 0}\left[f(a+h) - f(a)\right] = 0$.

Calculemos dicho límite: $\lim_{h\to 0}\left[f(a+h) - f(a)\right] = \lim_{h\to 0} h\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} h.f'(a) = 0$.

En consecuencia f es continua en x = a como queríamos demostrar.

Observaciones:

1) Si f no es continua en x = a, entonces f no es derivable en x = a.
2) Hay funciones continuas que no son derivables, por ejemplo las funciones valor absoluto.

Una función f es derivable en un intervalo abierto (a, b) si lo es en cada uno de sus puntos.

Una función f es derivable en un intervalo cerrado [a, b] si es derivable en el intervalo abierto (a, b), derivable por la derecha en a y derivable por la izquierda en b.

Sea f derivable en un conjunto $D' \subset Domf$. Podemos definir una nueva función que asocia a cada número real x de D' su derivada f´(x), se le llama **función derivada** y se denota por f´.

$$f':D' \subset Domf \dashrightarrow IR$$
$$x \dashrightarrow f'(x)$$

Si derivamos f´ (*su dominio no tiene que coincidir con el de f*) obtenemos f´´, llamada derivada segunda. Si seguimos derivando obtendremos la f´´´, ... (derivada enésima) $f^{n)}$.

Ejercicio 2: Calcula la función derivada de f(x) = $\frac{x-1}{x+1}$

2.2 REGLAS DE DERIVACIÓN.

Para calcular la derivada de una función necesitamos las reglas de derivación, cuyas demostraciones se basan en la definición de límite:

a) Derivada de la suma:

$$\lim_{x\to a}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)-[f(a)+g(a)]}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)+g(x)-g(a)}{x-a}=$$
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=f'(a)+g'(a)$$

Es decir (f + g)´ = f´ + g´

b) Derivada del producto:

$$\lim_{x\to a}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(x)g(a)+f(x)g(a)-f(a)g(a)}{x-a}=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)[g(x)-g(a)]}{x-a}+\frac{g(a)[f(x)-f(a)]}{x-a}=f(a)g'(a)+g(a)f'(a)$$

Es decir (f g)´ = f´ g + f g´

c) Derivada de la composición: h(x) = g(f(x))

$$\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}.\frac{f(x)-f(a)}{f(x)-f(a)}=\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}.\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=$$
$$g'[f(x)]\,.\,f'(x)\Rightarrow [g(f(x))]'=g'[f(x)]\,.\,f'(x)$$

c) Derivada de la función inversa:

Por ser f y f^{-1} funciones inversas, tenemos que $f(f^{-1}(x)) = x$, por la regla de la cadena, $[f(f^{-1}(x))]' = [x]'$, $f'(f^{-1}(x)) . (f^{-1})'(x) = 1$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$

Normalmente no utilizamos la derivada de la función inversa, esta fórmula es útil para conseguir otras, por ejemplo:

f(x) = senx → $f^{-1}(x)$ = arcsenx. $[f^{-1}(x)]' = \dfrac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \dfrac{1}{\cos[\text{arcsen}x]}$ = [puesto que $\text{sen}\,\alpha = x \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}$ por tanto $\cos[\text{arcsen}x] = \sqrt{1-x^2}$] = $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Es decir, $[f^{-1}(x)]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

DERIVADA LOGARÍTMICA: No está en nuestro curriculum pero podemos ampliar y es fácil la derivación logarítmica. Te dejo aquí un ejemplo, puedes ver más en el libro.

Dada la función: $f(x) = x^x$, para calcular su derivada primero aplicamos logaritmo $\Rightarrow$ Ln f(x) = Ln x^x $\Rightarrow$ Ln f(x) = x Ln x $\Rightarrow$ (Ln f(x))´ = (x Ln x)´

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=1\cdot \text{Ln}x+x\,\frac{1}{x}\ \Rightarrow\ \frac{f'(x)}{f(x)}=\text{Ln}x+1\ \Rightarrow\ f'(x)=f(x)(\text{Ln}x+1)\ \Rightarrow$$
$$f'(x)=x^x(\text{Ln}x+1)$$

Ejercicio 3: Deriva las siguientes funciones (hojas fotocopiadas)

2.3 PROBLEMAS.

Ejercicio 4: Estudia la derivabilidad de la función f(x) = $\begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-1} & si\ x \neq 1 \\ -1 & si\ x = 1 \end{cases}$ en x = 1.

Ejercicio 5: Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) f(x) = $\begin{cases} x^2 - 2x - 6 & si\ x < 3 \\ \frac{x}{2-x} & si\ x \geq 3 \end{cases}$ b) g(x) = $\begin{cases} x^2 + 1 & si\ \ x < 0 \\ 1 & si\ \ 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1 & si\ \ x > 2 \end{cases}$

Ejercicio 6: Dada las funciones f(x) = x^2 + 2x – 1, g(x) = - x^2 + 6x + 2 y F(x) = $\begin{cases} f(x) & si\ x < 1 \\ g(x) & si\ x \geq 1 \end{cases}$, calcula: f´(1), g´(1) y F´(1).

Ejercicio 7: Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto x = 3, utilizando la definición de derivada, siendo f(x) = $\sqrt{x+1}$.

Ejercicio 8: Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de y = x^2 trazadas desde el punto P(1, -2)

Ejercicio 9: Sea f(x) = x^2 + ax + b. Halla los valores reales de a y b para que la recta y = 2x sea tangente a la gráfica en el punto P(2, 4).

Ejercicio 10: ¿En qué punto de la gráfica de f(x) = x^2 - 6x + 8 la tangente es paralela al eje de abscisas? ¿Y paralela a la bisectriz del 1º cuadrante?

Ejercicio 11: Calcula las derivadas sucesivas de las siguientes funciones y escribe la expresión general de las derivadas enésimas.

a) f(x) = sen x b) f(x) = cos (3x)

Ejercicio 12: ¿Para qué valores de x se anulan las derivadas de las funciones siguientes?

a) f(x) = $e^{2x} - 4e^x$ b) f(x) = Ln$\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$

c) f(x) = xlnx – x d) f(x) = $e^{\frac{x^2}{x-3}}$

Ejercicio 13: Dada la función f(x) = $\begin{cases} \frac{x^2+1}{2} & si\ \ x \le 1 \\ -\frac{1}{x} + k & si\ \ x > 1 \end{cases}$ Hay algún valor de k para que la función sea derivable en x = 1?

Ejercicio 14: La función f(x) = $|x|$ no es derivable en x = 0 y la función g(x) = senx sí lo es. ¿Es derivable en x = 0 la función p(x) = f(x) g(x)?

Ejercicio 15: En la figura adjunta se representa la gráfica de la función derivada f´de una cierta función f: [0, 1] → IR.

a) Halla una expresión algebraica de f sabiendo que su gráfica pasa por el origen de coordenadas.
b) Representa la gráfica de f.
c) ¿Se verifica que f´´(1/2) = 0?