UNIDAD 3. APLICACIONES DE LAS DERIVADAS.

3.1 INFORMACIÓN EXTRAÍDA DE LA PRIMERA DERIVADA.

Una función es **estrictamente creciente** en un intervalo (a,b) de su dominio si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 del intervalo, con $x_2 > x_1$ se cumple que $f(x_2) > f(x_1)$.

Una función es **estrictamente decreciente** en un intervalo (a,b) de su dominio si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 del intervalo, con $x_2 > x_1$ se cumple que $f(x_2) < f(x_1)$.

Criterio 1: Sea f una función derivable en (a,b). f es estrictamente creciente en el intervalo abierto (a, b) si f´ es positiva en dicho intervalo.

Criterio 2: Sea f una función derivable en (a,b). f es estrictamente decreciente en el intervalo abierto (a, b) si f´ es negativa en dicho intervalo.

f tiene un **máximo relativo** en el punto x = a si existe un nº real $\delta>0$ tal que si $x\in(a-\delta, a+\delta)$ con $x\neq a$, entonces f(x) < f(a). f tiene un **mínimo relativo** en el punto x = a si existe un nº real $\delta>0$ tal que si $x\in(a-\delta, a+\delta)$ con $x\neq a$, entonces f(x) > f(a). f tiene un **máximo absoluto** en el punto x = a si para todo $x\in$ Dom f, con $x\neq a$, entonces f(x) < f(a). f tiene un **mínimo absoluto** en el punto x = a si para todo $x\in$ Dom f, con $x\neq a$, entonces f(x) > f(a). Si f tiene un mínimo o una máximo en x = a se dice que a es un **extremo** de f.

TEOREMA: Sea f una función derivable en (a, b) y tal que alcanza un máximo o un mínimo en c $\in$ (a, b), entonces f'(c)=0.

Demostración:
Supongamos que en c tenemos un máximo puesto que existe f'(c) tendremos que

$$\exists \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \Rightarrow 0\le \lim_{h\to 0^-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \le 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = 0 \Rightarrow f'(c)=0$$

Observación 1: Si la derivada f´(a)= 0, no podemos afirmar que f tenga en x = a un máximo o un mínimo. Ejemplo: $f(x) = x^3$.
Observación 2: Una función puede tener un extremo en un punto no derivable. Ejemplo: $f(x) = |x|$.

Para calcular los máximos o mínimos de una función debemos estudiar las imágenes de los siguientes puntos: 1) Puntos de derivada nula. 2) Puntos donde no es derivable. 3) Extremos del intervalo (si la función está definida en un intervalo cerrado).

Aquellos puntos cuya recta tangente es horizontal ($f'(a) = 0$) se llaman **puntos singulares** (Recuerda que puede ser un extremo o no, ejemplo $f(x) = x^3$ en $x = 0$). También podemos tener una función que presenta un mínimo o máximo pero no tiene derivada en dicho punto (ejemplo $|x|$ en $x = 0$), por ello a los valores reales en los que $f'(x) = 0$ o no exista $f'(x)$ se les llama **puntos críticos**.

Ejercicio 1: Halla los extremos absolutos de las siguientes funciones en el intervalo indicado, el teorema de Weierstrass nos garantiza que se alcanza los máximos y mínimos absolutos:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ en $[-1, 1]$
b) $f(x) = |x^2 - 4|$ en $[0,3]$
c) $f(x) = x^2 - |x| - 2$ en $[-2,1]$
d) $f(x) = x^2 . e^x$ en $[-1,1]$

Ejercicio 2.- Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones y sus extremos relativos (en clase del a al g):

a) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 5$
b) $f(x) = \cos x$
c) $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2+1}$
d) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$
e) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
f) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
g) $f(x) = \left(2x^3 - 4x^2\right) e^{-x}$
h) $f(x) = x^3 - x$
i) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$
j) $f(x) = 5x^2 + 6(4 - x)^2$

Ejercicio 3: Determina un punto de la curva de ecuación $f(x) = x e^{-x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.

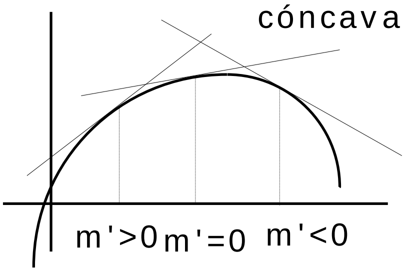
Ejercicio 4: Halla los valores de a, b y c sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{x + c}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$, una asíntota oblicua de pendiente 2 y un extremo de abscisa $x = 3$.

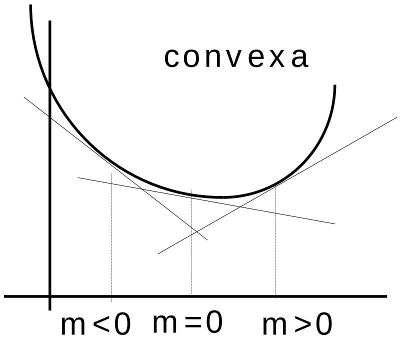
Ejercicio 5: Demuestra analítica y gráficamente que la ecuación $e^x = x$ no tiene solución.

3.2 INFORMACIÓN EXTRAÍDA DE LA SEGUNDA DERIVADA.

Una función f es **cóncava** en un intervalo si al unir dos puntos de dicho intervalo, el segmento que los une queda por debajo de la gráfica de f en dicho intervalo.

Una función f es **convexa** en un intervalo si al unir dos puntos de dicho intervalo, el segmento que los une queda por encima de la gráfica de f en dicho intervalo.





Criterio 3: Una función f es convexa en el intervalo abierto (a, b) si la segunda derivada de f, f´´, es positiva en dicho intervalo.

Criterio 4: Una función f es cóncava en el intervalo abierto (a, b) si la segunda derivada de f, f´´, es negativa en dicho intervalo.

Si la función f tiene en el punto x = a un cambio de cóncava a convexa, o viceversa, se dice que f tiene un **punto de inflexión** en dicho punto.

Criterio 5: Si $f''(a)=0$ y $f'''(a) \neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en x = a.

Criterio 6: Una función f tiene un **máximo relativo** o absoluto en x = a (que pertenece a su dominio) si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$.

Criterio 7: Una función f tiene un **mínimo relativo** o absoluto en x = a (que pertenece a su dominio) si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$.

Ejercicio 6: Estudia la concavidad y convexidad (o intervalos de monotonía) de las siguientes funciones y calcula sus puntos de inflexión, en clase del a al g:

a) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 5$

b) $f(x) = \cos x$

c) $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2+1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

e) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

g) $f(x) = (2x^3 - 4x^2)\, e^{-x}$

h) $f(x) = x^3 - x$

i) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

j) $f(x) = 5x^2 + 6(4-x)^2$

Ejercicio 7: La gráfica que se muestra es la de la derivada segunda de cierta función f. A partir de ella, deduce la curvatura de f y sus puntos de inflexión. *El dibujo que f´´ es una parábola que corta en (0,0), (2,0) y vértice en (1,1).*

Ejercicio 8: De la función f definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Se sabe que tiene un máximo en x = - 1, su gráfica corta al eje x en el punto de abscisa x = - 2 y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa x = 0. Calcula a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2 tiene pendiente 9.

3.3 LA DERIVACIÓN PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES: REGLA DE L`HÔPITAL

Los límites del tipo $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{0}{0}$ ... , ya sabemos resolverlos.

¿Cómo resolver los límites del tipo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$? Para resolver este último límite tenemos la regla de L'Hopital.

<u>**REGLA DE L'HÔPITAL.**</u>

Sean dos funciones tales que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ siendo $g(x) \neq 0$ en un entorno de a. Si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ = l entonces $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ejercicio 9: Calcula los siguientes límites:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{2x}}{x}=-2$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2}=\dfrac{14}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2-x)e^x-x-2}{x^3}=\dfrac{-1}{6}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x-x+\dfrac{x^3}{6}}{x^3}=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}}{x^2}=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x-x+\dfrac{x^3}{3}}{x^3}=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{sen}x}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\dfrac{-1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x^2}=\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}x(b^{1/x}-1)=\operatorname{Ln}b$

$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x}{x}=\begin{cases}+\infty & \text{si } x\to+\infty\\ 0 & \text{si } x\to-\infty\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x}{\log x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+}x(\log x)=0$

$\lim\limits_{x\to +\infty}(1-2^{\frac{1}{x}})x=$

$\lim\limits_{x\to +\infty}xe^{-x}=$

De estos ejercicios podemos obtener las siguientes consecuencias:

1) También se verifica si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ = +∞ o -∞ entonces $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

2) También se verifica para los límites laterales.

3) También se verifica si lim $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$.

4) En el primer paso, podemos volver a tener una indeterminación, se puede repetir dicho proceso mientras continúe la indeterminación.

5) Hay expresiones del tipo ∞ - ∞ o 0. ∞ que podemos escribir en forma de cociente para que se le pueda aplicar la regla de L´Hôpital.

6) También lo podemos aplicar cuando x->∞

Ejercicio 10: Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}=1$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{e^{-x}}{x^2}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\mathrm{Ln}x\,.\,\mathrm{tg}x)=0$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}(1+x)}{e^x-e^{-x}}=\frac{1}{2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}(e^x+x)}{x}=2$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}(\cos 2x)}{x^2}=-2$ h) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x.\mathrm{Ln}\frac{x}{x+1}\right)=-1$ i) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{e^x-e}-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1-3}{0}=\infty$

j) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x^2}=+\infty$ k) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ l) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\mathrm{Ln}(\cos x)}=-1$

m) $\lim\limits_{x\to 2}[(x-2)\mathrm{Ln}(x-2)]=0$ n) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+x}{\sqrt{9+x}-3}=6$ ñ) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\frac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}x}=\frac{1}{3}$

Ejercicio 11: Calcula el valor de a para que el siguiente límite sea finito y calcula dicho límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{a}{\ln x}\right)$$

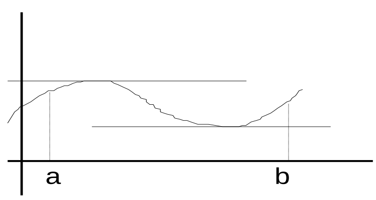
Ejercicio 12: Dada la función f: (-π, π) → IR con f(x) = $\frac{\ln(1+x^2)}{senx}$ $si\ x\neq 0$. Define una función f para que sea derivable en todo IR.

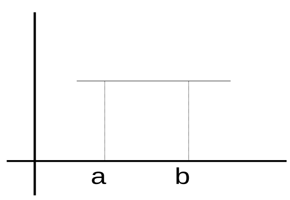
3.4 DERIVABILIDAD EN INTERVALOS: TEOREMA DE ROLLE, DEL VALOR MEDIO Y CAUCHY.

Como consecuencia de la derivabilidad en intervalos cerrados tenemos los siguientes teoremas:

TEOREMA DE ROLLE:

Sea f es continua en [a, b] y derivable en (a, b), si f(a) = f(b) entonces ∃ al menos un número real c∈ (a, b) tal que f'(c) = 0





Demostración: Por ser f continua en [a, b] el teorema de Weierstrass alcanza máximo o mínimo en $c \in (a, b)$. Se puede plantear las siguientes situaciones

1º $c \in (a, b)$. Por ser máximo o mínimo $f'(c)=0$, por tanto $c \in (a, b) / f'(c) = 0$

2º Si alcanza el máximo en a y en b, puesto que $f(a) = f(b) \Rightarrow c \in (a, b)$ donde alcanza el mínimo, por tanto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

3º Si a fuera máximo y mínimo, puesto que $f(a) = f(b) \Rightarrow f \equiv cte. \Rightarrow f' \equiv 0$ en (a, b).

<u>Interpretación geométrica</u> del teorema de Rolle: afirma que existe $c \in (a, b)$ en el cual la recta tangente es paralela al eje de abscisas.

Ejercicio 13.- Demuestra si las siguientes funciones cumple el teorema de Rolle en el intervalo indicado. Calcula c, cuando sea posible.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ en [0, 4]
b) $f(x) = |2x^2 - 1|$ en [0, 1]
c) $f(x) = Ln(x^2)$ en [-e, e]
d) $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x^5}$ en [-1,1]

Ejercicio 14.- Sea $f(x) = |x|$ en [-1,1] que no se anula en dicho intervalo, ¿contradice esta función el teorema de Rolle?

Ejercicio 15.- Calcula a, b y d para que la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax & si\ -1 \le x \le 1 \\ bx + d & 1 < x \le 5 \end{cases}$ cumpla las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo [-1, 5].

Ejercicio 16.- Utiliza el teorema de Bolzano y de Rolle para probar que las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^{-2x}$ se corten en un sólo punto cuando $x > 0$.

Ejercicio 16.- Dada la función $f(x) = e^x - x - 3$. Se pide:

a) Estudiar el intervalo de definición de f.
b) Demuestra que f tiene un único 0 en $(0,+\infty)$

Ejercicio 17.- Demuestra que la ecuación $2x^3 - 6x + 1 = 0$ tiene una única solución real en el intervalo (0,1).

Ejercicio 18.- Aplicando el teorema de Rolle, demuestra que $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo [-1,1] cualquiera que sea el valor de b.

Ejercicio 19.- Si en una función se verifica que $f(a) = f(b)$, f es derivable en (a,b) y existe $c \in$ (a,b) tal que $f'(c) = 0$, ¿podemos asegurar que f es continua en [a,b]?

TEOREMA DE VALOR MEDIO O DE LAGRANGE.

Sea f continua en [a, b] y derivable en (a, b), entonces existe al menos un pto. $\exists\ c \in (a, b)$ / $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ ó $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

La interpretación geométrica nos dice que existe al menos un punto donde la recta tangente, a dicho punto, es paralela a la recta que pasa por (a, f(a)) y (b, f(b))

Ejercicio 20.-Aplica el teorema del valor medio, si es posible, a la función $f(x) = 2x^2 + 4x - 16$ en [0,2]. Calcula el valor c correspondiente.

Ejercicio 21.- Sea $f(x) = 3x^2$. Encontrar un punto cuya recta tangente a la curva en dicho punto sea paralela a la cuerda que une los puntos (0, 0) y (4, 48).

****Ejercicio 22.- Demuestra que f cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [2,6]. ¿En qué punto se cumple la tesis? Siendo

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2+10x-19 & \text{si} \geq 4 \end{cases}.$$

Ejercicio 23.- Determina a y b para que la siguiente función cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0,2\pi]$:

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}\,x & \text{si } x \leq \pi \\ a\cos x + b & \text{si} > \pi \end{cases}.$$

Ejercicio 24.-Un punto se desplaza siguiendo un movimiento rectilíneo según la ecuación $x(t) = 3t + \mathrm{Ln}(t + 2)$, donde t es el tiempo en segundos. ¿En qué instante, t, alcanza la velocidad media que desarrolla en los cuatro primeros segundos?

Consecuencias:

1.- El valor de una función en el entorno de x=a tiene la siguiente forma $f(a+h) = f'(c)\,h + f(a)$ $c \in (a, a+h)$.

2.- Si una función f tiene derivada nula en todos los puntos de un intervalo abierto, entonces f es constante en dicho intervalo.

3.- Si dos funciones f y g tienen derivada iguales en todos los puntos de un intervalo abierto, entonces ambas difieren en una constante.

Ejercicio 25.- Comprobar que se cumplen las condiciones del teorema del valor medio de Cauchy para $f(c) = x^3$ y $g(x) = x + 3$ en [0, 3]. Hallar c.

Ejercicio 26.- Análogo $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ en [1, 4]