UNIDAD 3: EXPRESIONES Y FRACCIONES ALGEBRAICAS.

3.1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS.
3.2 OPERACIONES CON POLINOMIOS.
3.3 PRODUCTOS NOTABLES.
3.4 FRACCIONES ALGEBRAICAS

3.1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS:

Sería importante no aburrirles copiando la etimología pero es interesante que lo lean. También ellos deben buscar y copiar las definiciones de: monomio, polinomio, identidad y ecuación (viene en el siguiente tema). Poner ejemplos de forma que podamos señalar las diferencias entre los monomios y polinomios, con una o varias incógnitas, que representen a fórmulas (áreas, volúmenes, velocidad), entre identidad y ecuación, para señalar lo que son los coeficientes, coeficiente principal, señalar los grados (suma de los exponentes de la parte literal, los números enteros son monomios de grado 0) de las expresiones algebraicas.

Las expresiones algebraicas son fundamentales para la resolución de problemas, ya que relaciona el lenguaje habitual con el lenguaje matemático.

Ejercicio 1: Traduce al lenguaje algebraico (matemático):

a) El doble de un número
b) El triple de un número
c) Ocho veces un número
d) la mitad de un número
e) Las dos terceras partes de un número
f) Cuarenta y cinco excede a un número en 5 unidades
g) Un número disminuido en 3 unidades, da veinticuatro
h) La diferencia entre la tercera parte y la cuarta parte de un número
i) La diferencia de dos números es 17
j) El perímetro de un rectángulo
k) El área de un triángulo

$A_t = \frac{1}{2}\, b \,.\, h$ es un ejemplo de: **Monomio** es el producto de un número real y una o varias incógnitas con exponente natural. Siendo 1/2 el **coeficiente** y b . h la **parte literal**. Dos monomios son **semejantes** si tienen la misma parte literal.

Ejercicio 2: Completa la siguiente tabla:

E. algebráico	Coeficiente	P. literal	Grado	E. algebráico	Coeficiente	P. literal	Grado
$2x$				6			
$3x^2$				$7/x$			
$-5\,x^2yz$				$\sqrt{3}\,x^2y^{2}z$			
$-3\,x^{-3}$				$\frac{1}{2}\,x^8$			

¿Alguna de las expresiones algebraicas es monomio?

Recordemos las operaciones que podemos efectuar con los monomios. Dos monomios son **semejantes** si tienen idéntica parte literal. <u>Sólo podemos sumar monomios semejantes</u>, para sumarlos, sumamos los coeficientes y dejamos la misma parte literal. Aunque si podemos multiplicar monomios cualesquiera (primero multiplicamos los signos, después los coeficientes y por último la parte literal). Y para calcular la potencia de un monomio tendremos en cuenta $(a . b)^n = a^n . b^n$.

Ejercicio 3: Realiza las siguientes operaciones:

a) $5x - 3x + 4x + 7x - 11x + x =$

b) $3\ x^2y - 5\ x^2y + 2\ x^2y + x^2y =$

c) $7\ x^3 - 11\ x^3 + 3\ y^3 - y^3 + 2\ y^3 =$

d) $5x^2 \cdot 3x^3 =$

e) $-3x^2 \cdot (-2x^5) =$

f) $x^2 \cdot (-2x^3) \cdot 4x =$

g) $(x^2)^3 =$

h) $(2x^3)^5 =$

i) $(-3x)^2$

j) $(-3x^3)^3 =$

3.2 OPERACIONES CON POLINOMIOS:

$P = 2a + 2b$ es un ejemplo de: **Polinomio** es la suma o resta de dos o más monomios. Si un polinomio está formado tan solo por dos monomios se llama **binomio**. Trabajaremos con polinomios con una sola incógnita (x).

Dado un polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. El grado de un polinomio es el mayor de los grados de todos los monomios (cuidado con el orden y que esté reducido). Se llama **coeficiente principal** aquel coeficiente que se encuentra en el monomio de mayor grado y **término independiente** al monomio que no tiene parte literal. Poner ejemplos con una y con varias variables.

Ejercicio 4: Completa la siguiente tabla:

Polinomio	C. Principal	Coeficiente de x^2	Grado	Término Independiente
$2x + 3$				
$3x^2 - 6x - 2$				
$- 5\ x^2 + 3x^5$				
$2 + 3x - 3x^{-3}$				

Se llama **valor numérico** de un polinomio P(x) en x = a al valor que se obtiene al sustituir x por a y efectuar las operaciones indicadas.

Ejercicio 5: Calcular el valor numérico de los siguientes polinomios en el número indicado:

$P(x) = x^2 - 1$	en $x = -1$
$Q(x) = 2x^3 - 3x + 1$	en $x = 0$
$R(x) = 2x^3 - 16$	en $x = 0, 1, -1, 2, -2$
$S(x,y) = 2xy - 3\ x^2$	en $x = 2\ \ y = 3$

Decimos que el número a es una **raíz** del polinomio P si su valor numérico es 0, es decir, si P(a)= 0. *Que observen cuál de los números anteriores son raíces.*

Con los polinomios podemos realizar las operaciones anteriormente descritas. Aunque añadiremos la propiedad distributiva $a \cdot (b + c)$.

Ejercicio 6: Realiza las operaciones indicadas:

a) $(2x^3 - 3x^2 + 3) + (4x^3 - 2x^2 - 3x + 1) =$
b) $(5x^3 - x^2 + 3) + (2x^3 + x^2 + 3x + 1) =$
c) $(3x^5 - 3x^3 + 3x - 3) - (2x^6 + 3x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1) =$
d) $(4x^4 - 3x^3 + x^2) - (3x^3 + x^2 + 3) + (2x^4 + 3x^3 - 2x + 5) =$
e) $\left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 5\right) - \left(\frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2 - \frac{2}{7}x - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{1}{2}\right) =$
f) $2x \;.\; 3x^2 =$
g) $-2x \;.\; (-5x^3) =$
h) $2x\,(x^2 + 1) =$
i) $5\,(3x^2 + 7x + 11) =$
j) $3x^2\,(x^2 + 3x - 1) =$
k) $-2\,(5x^3 + 3x^2 - 8) =$
l) $-2x^3\,(3x^2 - 5x + 8) =$
m) $(2x + 1)(5x + 3) =$
n) $(x^2 + 1)(3x^2 + 2x - 3) =$
o) $2a^2 \;.\; (3a^2 + 5a^3) =$
p) $(2x^2 + 3)(-x^3 + 3x - 2) =$
q) $\frac{1}{2}\,x \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{3}{2}\right) =$

Ejercicio 7: Sean $P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x + 3$, $Q(x) = 5x^3 + 3x^2 - 11$. Halla P + Q y P – Q.

Ejercicio 8: Dados los polinomios $P(x) = 2x + 1$, $Q(x) = 2x^2 - 3x + 5$, $R(x) = x^4 + 1$ y $S(x) = 2x^4 + 3x^2 - 2x - 5$, efectúa las operaciones indicadas:

a) $P(x) + Q(x) - R(x) =$
b) $2\,P(x) + x\,Q(x) - 2x\,R(x) =$
c) $P(x) \,.\, R(x) + Q(x) =$
d) $-2x^2\,P(x) + S(x) \,.\, R(x) =$

Para dividir polinomios debemos tener en cuenta:

1) Ordenar las potencias de x de mayor a menor tanto en el dividendo como en el divisor. En el dividendo dejar huecos en los lugares en que falta alguna potencia de x.
2) Se divide el primer término (el de mayor grado) del dividendo entre el primer término del divisor.
3) La división acaba cuando el grado del dividendo es menor que la del divisor.
4) Para comprobar si habéis hecho bien el ejercicio tan solo tenéis que realizar la prueba: Dividendo = divisor x cociente + resto.
5) El grado del cociente es el grado del dividendo menos el del divisor. El grado del resto es menor que el grado del divisor. (Un número es un polinomio de grado 0).

Ejercicio 9: Realiza las siguientes divisiones:

a) $4xy : 2x =$
b) $-8x^2 : 2x =$

c) $(2x^4 - 3x^3 + 2x - 8) : (x^2 + x) =$
d) $(x^2 - 8x - 24) : (x^2 - 3) =$
e) $(x^3 - 5x^2 + 8x - 9) : (x + 6) =$
f) $(3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 12) : (x^3 - 1) =$
g) $(-4x^4 - 5x^2 + 8x - 10) : (2x^2 + 1) =$
h) $(6x^3 + x^5 - 12x + 6) : (x^3 - 4) =$
i) $(-9x^2 + 6x^6 - 4x^4 - 10) : (2 + 2x^4) =$

Cuando un factor ("algo" que multiplica) se repite en todos los sumandos, podemos extraerlo de la siguiente forma $4xy^2 + 8xy - 16x = 4x\, y^2 + 2\cdot 4xy - 4\cdot 4x = 4x\,(y^2 + 2y - 4)$ A este proceso se le llama **sacar factor común**.

Ejercicio 10: Extrae factor común en cada una de las siguientes expresiones:

a) $3x^2 + 6x =$
b) $a^4 - 3a^2 =$
c) $6x^2y^4 - 3x^2y^3 + \frac{3}{2}x^5y^4 =$
d) $18x^2y - 24x^3y^3 + 30x^5y^4 =$
e) $6x^4 - 3x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x =$
f) $3(x + 1) + 4(x + 1) - 2(x + 1) =$

Otra forma de dividir de polinomios es la **Regla de Ruffini**. Es una herramienta que nos ayuda a dividir polinomios de una forma más rápida y fácil. El inconveniente es que dicha regla sólo se puede aplicar cuando se dan las siguientes condiciones:

1) El divisor es un binomio de grado 1, con coeficiente principal 1, es decir, es de la forma $x - a$ ó $x + a$.

2) El término independiente del dividendo tiene que ser distinto de cero.

3) En aquellos lugares que falten potencias de x del dividendo, debemos poner 0.

Para explicar poner ejemplo de una división normal (apartado e del ejercicio 9) y junto a ella la de Ruffini. En una división por Ruffini siempre debemos indicar el cociente y el resto.

Ejercicio 11: Calcula aplicando la regla de Ruffini, el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(x^3 - 3x^2 + 2x + 4) : (x + 1) =$
b) $(5x^5 + 14x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 5x - 2) : (x + 3) =$
c) $(2x^3 - 15x - 8) : (x - 3) =$
d) $(x^4 + x^2 + 1) : (x + 1) =$
e) $(2x^4 + x^3 - 5x - 3) : (x - 2) =$
f) $(x^5 - 32) : (x - 2) =$
g) $(4x^3 + 4x^2 - 5x + 3) : (x + 1) =$
h) $(2'5x^3 + 1'5x^2 - 3'5x - 4'5) : (x - 1) =$

Ejercicio 12: Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios en el punto indicado:

a) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 4$ en $x = -1$
b) $P(x) = 14x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ en $x = -3$
c) $P(x) = 2x^3 - 15x - 8$ en $x = 3$
d) $P(x) = x^4 + x^2 + 1$ en $x = -1$

¿Qué observas? A esta coincidencia se le llama teorema del resto. **Teorema del Resto:** El valor numérico que toma un polinomio P(x) en x = a, coincide con el resto de dividir P(x) entre x – a. Es decir P(a) = Resto de P(x): (x-a).

Ejercicio 13: Dado el polinomio $P(x) = x^3 - x + 1$.

a) Calcula el resto de la división por (x + 1).
b) Calcula el valor numérico de P en x = - 1.

Una aplicación <u>muy importante</u> de la Regla de Ruffini es la factorización de polinomios. Factorizar un polinomio es escribirlo como producto de binomios de grado 1, <u>si es posible</u>. Para factorizar un polinomio seguiremos los siguientes pasos:

a) Sacar factor común si es posible (recordar que x es similar a (x – 0))
b) Aplicar la regla de Ruffini reiteradamente, utilizando como divisores aquellos números enteros que dividen al término independiente (+, -). Un mismo entero puede ser utilizado varias veces, seguir un orden ya que si no sirve un entero tampoco servirá en divisiones posteriores.
c) Si tenemos algún factor de grado 2, aplicamos la ecuación de 2º grado, los opuestos de las raíces nos ayudarán a factorizarlo.

Ejercicio 14: Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 - x - 6$	b) $6x^2 + x - 2$
c) $x^2 + 2x + 1$	d) $6x^2 + 7x - 3$
e) $40x^2 + 6x - 18$	f) $x^2 - 4x + 4$
g) $x^2 - 4$	h) $x^3 - 16x$
i) $x^3 + 6x^2 + 9x$	j) $x^3 - 10x^2 + 25x$
k) $x^3 - x^2 - 4x + 4$	l) $x^3 - 2x^2 - x + 2$
m) $x^3 - 6x^2 + 6x - 6$	n) $x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x$
ñ) $x^4 - 5x^3 - x^2 + 5x$	o) $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$
p) $6x^2 + x - 1$	q) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x^2 + 2x - 3$
r) $6x^4 + x^3 - 48x^2 - 37x + 30$	s) $x^3 - 25x$
t) $x^3 + x + 1$	u) $x^3 - 16x$
v) $12x^3 - 38x^2 - 24x + 90$	w) $x^5 + x^4 - 5x^3 + 3x^2$

3.3 PRODUCTOS NOTABLES:

Con el fin de agilizar los cálculos debemos tener en cuenta las siguientes igualdades (que tengan claro que es una igualdad y que una ecuación) que nos facilitará el cálculo de polinomios, llamadas <u>Identidades notables</u>:

Cuadrado de una suma: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Cuadrado de una diferencia: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Suma por diferencia: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

** E*xplicar* $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) =$, dibujar un cuadrado de lado a + b.

Ejercicio 10: Calcula utilizando los productos notables (yo hago a, c, f, h, i, k, m):

a) $(x + 2)^2 =$	$(x + 3)^2 =$	$(x + 5)^2 =$
b) $(x + 5)^2 =$	$(x + 7)^2 =$	$(x + 9)^2 =$
c) $(x - 2)^2 =$	$(x - 3)^2 =$	$(x - 5)^2 =$
d) $(x - 5)^2 =$	$(x - 7)^2 =$	$(x - 9)^2 =$
e) $(3x + 1)^2 =$	$(3x - 1)^2 =$	$(-3x + 1)^2 =$

f) $(3x^2 + x)^2$ = $(3x^2 - x)^2$ = $(-3x^2 - x)^2$ =
g) $(3x^2 + 2x)^2$ = $(3x^2 - 2x)^2$ = $(-3x^2 + 4x)^2$ =
h) $(4x + 2)^2$ = $(4x - 2)^2$ = $(-4x - 1)^2$ =
i) $(x + 3) . (x - 3)$ = $(x + 5) . (x - 5)$ = $(x + 7) . (x - 7)$ =
j) $(x + 6) . (x - 6)$ = $(x + 8) . (x - 8)$ = $(x + 10) . (x - 10)$ =
k) $(2x + 1) . (2x - 1)$ = $(3x + 2) . (3x - 2)$ = $(5x + 7) . (5x - 7)$ =
l) $(x + 1) . (x - 1)$ = $(4x + 2) . (4x - 2)$ = $(3x + 7) . (3x - 7)$ =
m) $(x^2 + 1) . (x^2 - 1)$ = $(2x^2 + 3) . (2x^2 - 3)$ = $(2x^2 + 3) . (x - 3)$ =

3.4 FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Se llama **fracción algebraica** al cociente de dos polinomios. De forma similar que con las fracciones numéricas, con las fracciones algebraicas podemos realizar varias operaciones. La **simplificación** de fracciones numéricas consiste en factorizar los polinomios (numerador y denominador) y "tachamos" los factores iguales.

Ejercicio 15: Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\frac{x+7}{x}$

b) $\frac{x-2}{-x^2+2x}$

c) $\frac{2x^3+10x^2+12x}{x^3+3x^2+2x}=\frac{2(x+3)}{x+1}$

d) $\frac{x^4+3x^3-13x^2-15x}{x^3+x^2-9x-9}=\frac{x(x+5)}{x+3}$

e) $\frac{x^3-4x}{x^4+4x^3+4x^2}=\frac{x-2}{x(x+2)}$

f) $\frac{2(2x^3-5x^2+x+2)}{2x^3+x^2-8x-4}=\frac{2(x-1)}{x+2}$

g) $\frac{x^3+3x^2-3x-15}{x^3+x^2-9x-9}=$ No se puede facto.

h) $\frac{6x^5+7x^4-x^3-2x^2}{-2x^3-x^2+x}=3x^2+2x$

Para sumar (o restar) fracciones algebraicas, primero debemos reducir a común denominador, hallando el m.c.m. de los denominadores.

Ejercicio 16: Efectúa:

a) $\frac{2x}{x+1}-\frac{x}{x+1}=$

b) $\frac{1}{x^2}+\frac{2x+1}{x}=$

c) $\frac{1}{x^2-1}-\frac{x}{x-1}=$

d) $\frac{3x}{x^2-4}-\frac{2}{x+2}=$

Para **multiplicar** o **dividir** fracciones algebraicas, lo hacemos de forma similar a las fracciones numéricas.

Ejercicio 17: Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{x^2-25}{x-2}\cdot\frac{2x-4}{x+5}$

b) $\frac{x^2-9}{x-25}:\frac{x+3}{x+5}$