TEMA 4: ECUACIONES Y SISTEMAS.

4.1 Resolución de distintos tipos de ecuaciones.
4.2 Sistemas lineales y no lineales.
4.3 Resolución de problemas.

4.1 DISTINTOS TIPOS DE ECUACIONES.

Completa la siguiente tabla:

	Ecuación	Identidad	Ecuación compatible	Ecuación incompatible	Ecuaciones equivalentes
Definición					
Ejemplo					

Si no recuerdas como resolver ecuaciones sencillas puedes ver los siguientes vídeos:
Ecuaciones de primer grado sencillas https://www.youtube.com/watch?v=F1EfQ8vHSc0
Ecuaciones de primer grado con paréntesis https://www.youtube.com/watch?v=rAeTAdf8K38

Aunque son importantes las herramientas matemáticas que vamos a aprender, no olvides utilizar el ensayo y el error, tu ingenio. Prueba a resolver las siguientes ecuaciones sencillas:

a) $x + 3 = 0$
b) $x^2 = 0$
c) $x(x - 1) = 0$
d) $(x + 3)(x - 4) = 0$
e) $2^x = 8$
f) $\log 1000 = x$
g) $\sqrt{x+1} = 1$

También recordamos como resolver una ecuación de 2º grado, es importante que recordemos algunas cosas importantes: Son de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, y tiene 2, 1 (doble) o ninguna solución. Para resolverlas debemos tener en cuenta tres situaciones **distintas**:

Ejercicio 1: Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado.

a) $x^2 - x = 0 \rightarrow x(x - 1) = 0$ → $x = 0$
→ $x - 1 = 0, x = 1$

b) $5x^2 + x = 0$

c) $3x^2 - 11x = 0$
d) $-x^2 + 12x = 0$

**Si falta el término x, sacamos factor común. Observa que 0 siempre es una solución.

e) $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4, x = \pm 2$
f) $4 - 25x^2 = 0$
g) $x^2 + 16 = 0$
h) $4x^2 - 9 = 0$

**Si falta el término independiente, despejamos x. Las dos raíces son opuestas.

Si aún no lo tienes claro puedes ver el vídeo https://www.youtube.com/watch?v=uIl2MYAUrXk

**Si la ecuación está completa, $ax^2 + bx + c = 0$, utilizamos: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

i) $x^2 - 2x - 8 = 0$
j) $2x^2 - 7x - 4 = 0$
k) $4x^2 + 11x - 3 = 0$
l) $2x^2 - 3x + 1 = 0$
m) $x^2 - 13x + 42 = 0$
n) $-2x^2 + 7x + 15 = 0$
ñ) $12x^2 - 66x + 30 = 0$
o) $6x^2 - x - 1 = 0$
p) $x^2 + 10x + 25 = 0$
q) $10x^2 + 10x + 10 = 0$
r) $2x(x - 1) + 3x = 2x - x^2$
s) $x(3x - 2) - x = 3x - 3 - x^2$

Para repasar puedes ver los siguientes vídeos https://www.youtube.com/watch?v=LQ2RguI8nXA
o https://www.youtube.com/watch?v=d06jWHM-b3E

** ¿De qué depende el número de soluciones de una ecuación de 2º grado? ¿Ves alguna relación entre las soluciones?

Ejercicio 2: Escribe una ecuación de 2º grado que tenga como soluciones a 2 y – 3.

Ejercicio 3: Calcular a y b para que la ecuación $ax^2 - x - 6 = 0$ tenga como solución a 3.

Profundizar. Ejercicio 4: Hallar el valor de c para que la ecuación $x^2 - 8x + c = 0$ cumpla que sus soluciones se diferencian en 10.

Ejercicio 5: Hallar el valor de c para que la ecuación $x^2 - 8x + c = 0$ cumpla que una solución es triple de la otra.

***Una ecuación es **bicuadrada** si es de grado 4 y sólo contiene los términos de exponente par, es decir, es de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Tienen 4, 2 o ninguna solución y se resuelven de la siguiente forma:

$x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \rightarrow$ cambio $x = t^2$, $x^2 = t^4$, al sustituir nos queda $t^2 - t - 8 = 0$, que resolvemos con la ecuación de segundo grado $t = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot(-8)}}{2\cdot 1} = \dfrac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \dfrac{2 \pm 6}{2}$,

$t = 4$, deshacemos el cambio, $x^2 = 4$, $x = \pm 2$
$t = -2$, $x^2 = -2$, $x = \pm\sqrt{-2}$ no existe, no da más soluciones.

Ejercicio 6: Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$
b) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$
c) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
d) $x^4 + 16 = 0$
e) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$
f) $x^4 + x^2 + 1 = 0$

Si quieres repasar puedes ver el vídeo https://www.youtube.com/watch?v=LQ2RguI8nXA

En las ecuaciones en las que la incógnita aparece bajo el signo radical, las resolveremos dejando la raíz sola y elevando al cuadrado. En estas ecuaciones es obligatorio comprobar las soluciones, ya que al elevar al cuadrado aumentamos de forma indebida el número de soluciones.

Ejercicio 7: Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales:

a) $\sqrt[3]{x^2+6x+9}=0$ b) $\sqrt{(x-1)(x+6)}=0$

c) $x+\sqrt{2x+1}=1$ d) $2x-\sqrt{3x+1}=4$

e) $\sqrt{5x-1}=\sqrt{x+1}$

Ejercicio 8: Resuelve las siguientes ecuaciones con denominador:

a) $\frac{3x-1}{3}=\frac{2x+5}{5}$ b) $\frac{2x-1}{2}=\frac{x^2}{x+1}$

c) $\frac{x+1}{2x-3}=\frac{7}{3}$ d) $\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x+1}$

e) $\frac{2}{x^2-9}=\frac{x^2-16}{72}$ f) $\frac{4-x}{3}-\frac{x+1}{2}=\frac{3x+5}{6}$

g) $\frac{x+1}{3}-\frac{2x-7}{5}=\frac{x+1}{15}$ h) $\frac{x+1}{3}-2x=\frac{4x+5}{2}$

i) $\frac{x+3}{2}-\frac{2x+5}{3}=\frac{6x+3}{9}$ j) $\frac{2x}{x-3}-\frac{6}{x-3}=-5$

k) $\frac{x^2+2}{x^2-4}=\frac{x}{x-2}+1$ l) $\frac{5x+3}{x^2-9}-\frac{2x-5}{x+3}=\frac{3}{x-3}$

***Revisar las soluciones, cuidado que no anulen el denominador.*

***Para resolver una ecuación de grado mayor que 2, salvo las bicuadradas, pasaremos todo a la izquierda y factorizamos el polinomio resultante.

Ejercicio 9: Resuelve las siguientes ecuaciones de grado superior:

a) $(x+3)(x-1)=0$ b) $(x-1)(x+5)(2x-6)=0$

c) $2x^3-x^2-6x=0$ d) $4x^3+4x^2-9x-9=0$

e) $(x^2-1)^2=x^2-1$ f) $4x^4-7x^2+3x=0$

g) $3x^4-75x^2=0$ h) $2x^3-250=0$

i) $x^3-2x^2-x+2=0$ j) $x^4+2x^3-5x^2-6x$

k) $2x^3+250=0$ l) $7x^2+3x=0$

Ejercicio 10: Escribe una ecuación que tenga como soluciones:

a) 5, 0 y 3 b) 3, -3 y 5

Ejercicio 11: Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log x = 1000$ b) $\log x - \log 3 = 0$

c) $\log x + \log 3 = \log 9$

4.2 SISTEMAS LINEALES.

Una ecuación es lineal si la operación que une las incógnitas es la suma o resta. Un **sistema lineal** está formado por 2 o más ecuaciones lineales. Nosotros trabajaremos con sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas. Se pueden resolver por 4 métodos: sustitución, igualación, reducción y por el método gráfico. Si el sistema tiene una única solución se llama

sistema compatible determinado, si tiene infinitas soluciones se llama **sistema compatible indeterminado**, y si no tiene solución se le llama **sistema incompatible**.

Ejercicio 12: Resuelve los siguientes sistemas lineales:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x-5y=1 \\ x+2y=15 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-2y=0 \\ 5x+3y=13 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x-y=3 \\ -4x+2y=-6 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x-y=4 \\ 4x+3y=-7 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x+2y=-1 \\ 3x-y=4 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 3x-2y=6 \\ x+4y=2 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+1}{3}+y=1 \\ \dfrac{x-3}{4}+2y=1 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{x+1}{4}-\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{3}{4} \end{array}\right\}$

i) $\left.\begin{array}{r} x+3y=9 \\ \dfrac{x^2-2y+3}{x-1}=3+x \end{array}\right\}$

j) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+3}{2}+\dfrac{y+3}{4}=1 \\ \dfrac{1-x}{2}-\dfrac{2-y}{6}=1 \end{array}\right\}$

k) $\left.\begin{array}{r} 2x-y=4 \\ 4x-2y=-7 \end{array}\right\}$

l) $\left.\begin{array}{r} 2x-y=4 \\ 4(x+3y)-14y=8 \end{array}\right\}$

m) $\left.\begin{array}{r} 3x+y=0 \\ 6x+2y=1 \end{array}\right\}$

n) $\left.\begin{array}{r} 2x-y=x+y-4 \\ -4x+8y=16 \end{array}\right\}$

Puedes repasar con los siguientes vídeos:
Sustitución https://www.youtube.com/watch?v=vPyPr5od87o
Reducción https://www.youtube.com/watch?v=hIYhtq8e8jA
Igualación https://www.youtube.com/watch?v=IBsJAFUpV2c

4.3 SISTEMAS NO LINEALES.

Cuando en una o en las dos ecuaciones encontramos la operación producto o división entre las incógnitas, o bien, la incógnita elevada a un exponente distinto de uno, le llamamos **sistemas no lineales**. Para resolverlos podemos utilizar los métodos anteriormente aprendidos, aunque en este caso no siempre podemos usarlos todos, a veces sólo uno de ellos es adecuado.

Ejercicio 13: Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} y-x=1 \\ x^2+y^2=5 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=58 \\ x^2-y^2=40 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} xy = 100 \\ x - y = 15 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} y + x = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 21 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} y + x = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} y + 2x = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} y + 2x = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 11 - 3x \end{array}\right\}$

4.4 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

La utilidad de las expresiones algebraicas y de las ecuaciones es poder resolver problemas. Para resolverlos debemos tener en cuenta los siguientes pasos:

1) Leer el problema hasta familiarizarnos (mínimo 2 ó 3 veces).
2) Nombrar la(s) incógnita(s).
3) Plantear la ecuación o el sistema.
4) Resolver la ecuación o el sistema.
5) Interpretar la solución. (Cuidado es muy importante este paso).

Ejercicio 14: Una persona compra un equipo de música y un ordenador por 2500 € y los vende, después de algún tiempo, por 2157´50 €. Con el equipo de música perdió un 10% de su valor, y con el ordenador, el 15%. ¿Cuánto le costó cada objeto?

Ejercicio 15: La nota media de los aprobados en un examen de matemáticas fue 6´5, y la de los suspensos, 3´2. En la clase son 30 alumnos y la nota media global fue 5´29. Calcula cuántos aprobaron y cuántos suspendieron.

Ejercicio 16: La calificación de una oposición se obtiene mediante dos exámenes: uno escrito, que es el 65% de la nota final, y otro oral, que es el 35%. Si una persona tuvo 12 puntos entre los dos exámenes y obtuvo un 5´7 de nota final, ¿qué nota tuvo en cada uno de ellos?

Ejercicio 17: La distancia entre dos localidades, A y B, es de 60 Km. Dos ciclistas salen a la vez de A. La velocidad del primero es 4/5 de la del segundo y llega $\frac{3}{4}$ de hora más tarde. ¿Qué velocidad lleva cada ciclista?

Ejercicio 18: Halla una fracción de la que sabemos que es igual a 1 si le añadimos 7 al numerador y 2 al denominador. También sabemos que el producto de ambos términos es 1254.

Ejercicio 19: Halla las dimensiones de una tela con forma rectangular cuya diagonal mide 13 cm y su área es de 60 cm^2.

Ejercicio 20: Calcula las dimensiones de un huerto rectangular cuya diagonal mide 75 m, sabiendo que es semejante a otro de base 48 m y altura 36 m.

Ejercicio 21: Los lados de un triángulo miden 18 cm, 16 cm y 9 cm. Si restamos una misma cantidad a los tres lados, obtenemos un triángulo rectángulo. Averigua dicha cantidad.

Ejercicio 22: Si acortamos en 2 cm la base de un rectángulo y en 1 cm su altura, el área disminuye en 13 cm^2. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que su perímetro es de 24 cm.

Ejercicio 23: Calcula los lados de un triángulo rectángulo isósceles de perímetro 24 cm.

Ejercicio 24: Halla los catetos de un triángulo rectángulo de 480 cm^2 de área y cuya hipotenusa mide 52 m.

Ejercicio 25: El lado de un rombo es de 5 cm y su área es 24 cm^2. Calcula la longitud de sus diagonales.

Ejercicio 26: Calcula el número de litros de agua que necesitamos para llenar una piscina. La piscina tiene una base rectangular de 1250 dm^2, con el doble de larga que de ancha y 200 dm de altura. Recuerda que un litro = 1 dm^3.

Ejercicio 27: Una lata contiene 33 cl y se han utilizado 28´27 cm^2 de hojalata para construir su base. Calcula las dimensiones de la lata (radio y altura).

Ejercicio 28: Un grupo de estudiantes alquila un piso por 490 € al mes. Si fueran dos más pagarían 28 € menos cada uno. ¿Cuántos estudiantes son?

Ejercicio 29: Calcula el lado de un cubo de 1.000 cm^3.

Ejercicio 30: Hemos puesto en un plazo fijo 1.500 € al 3% de interés anual. Después de varios años obtenemos 1.791´08. ¿Cuántos años han pasado?

Puedes practicar la resolución de ecuaciones con el programa geogebra. Recuerda que si en youtube escribes "resolver ecuaciones <u>bicuadradas</u> unicoos" te mostrará un vídeo que te ayudará a entender la resolución de ecuaciones y sistemas.