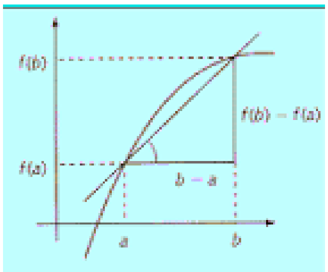
TEMA 7: DERIVADAS

7.1 Concepto de derivada. Función derivada.
7.2 Reglas de derivación.

7.1 CONCEPTO DE DERIVADA. FUNCIÓN DERIVADA.

Este concepto matemático no sólo nos prestará una ayuda primordial en la representación de funciones ya que con el cálculo de derivadas sabremos donde la función es creciente/decreciente y localizaremos los extremos relativos (máximos y mínimos), además nos ayudará a resolver problemas de optimización.

Se llama **tasa de variación media** (T.V.M.) de una función $y = f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ al cociente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Y se denota por T.V.M. $[a,b]$.



$$\text{T.V.M. } [a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

* Si la gráfica fuera de un movimiento la TVM sería la velocidad media en el intervalo correspondiente.

Si tomamos intervalos de longitud cada vez más menor, obtendremos la información que queremos, la variación en el punto de abscisa x=a. Llamamos **tasa de variación instantánea** de una función $y = f(x)$ en un punto $x = a$ al siguiente límite:

$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

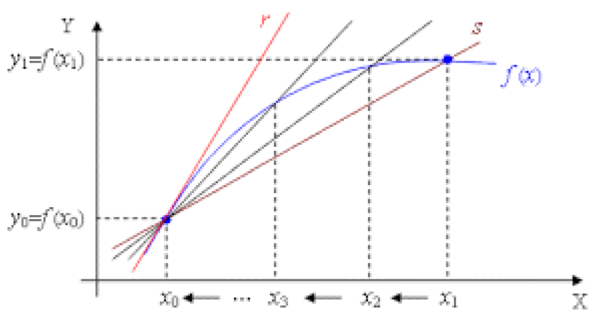
A este límite se le llama **derivada** de f en $x = a$ y se denota por $f'(a)$. Si dicho límite existe se dice que f es **derivable** en x=a.

Ejercicio 1: La tabla de la población de un determinado país es:

Año	2006	2008	2010	2012	2014
Población en miles	29.672	30.248	30.791	31.314	31.616

Indica en que unidad se mide la TVM (habitantes por año). ¿En qué periodo creció más la población en 2006/08 o en 2012/14?

<u>Interpretación geométrica</u>:



<u>La pendiente de la recta tangente a f en x=a es la derivada de f en x=a</u>. Podemos calcular la ecuación de la recta tangente a f en x = a porque conocemos el punto por donde pasa (a, f(a)) y su pendiente es f´(a). Y quedaría de la forma: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

A partir de la recta tangente podemos definir la **recta normal a f en x=a** como la recta perpendicular a la recta tangente en el punto (a,f(a)), pasa por el punto (a, f(a)) y su pendiente es $\frac{-1}{f'(a)}$. Y su ecuación es de la forma $y = \frac{-1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$

Ejercicio 2: Calcula, por definición, la derivada de f(x) = -2x en x = 3.

Ejercicio 3: Calcula, por definición, la derivada de $f(x) = \frac{3}{x+1}$ en x = 2. Calcula su recta tangente y normal en x = 2.

Ejercicio 4: Sea $f(x) = x^2 - 1$, calcula f´(0). Calcula la ecuación de la recta tangente y normal a f(x) en el punto de abscisa x = 1.

Observaciones:

1) **<u>Si una función f es derivable en un punto x = a entonces f es continua en x= a.</u>**
2) Si la derivada es positiva la función es creciente.
3) Si la derivada es negativa la función es decreciente.
4) Si una función tiene un máximo o un mínimo en un punto derivable, entonces su derivada vale 0.
5) La continuidad era poder dibujar la gráfica sin levantar el lápiz del papel, la derivabilidad es la suavidad de la curva, observa la función valor absoluto.

Queremos calcular la derivada de una función, no sólo en un punto concreto, sino en cualquier punto de su dominio. Para ello se define la **función derivada** de una función f es la que asocia a cada x su derivada, f´(x).

$$f': \mathrm{Dom} f \longrightarrow \mathrm{IR}$$
$$x \longrightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

<u>El dominio de f´está contenido en el dominio de f, es más está contenido en la continuidad de la función</u>.

Ejercicio 5: Dada la función $f(x) = x^2 - 1$. Calcular su función derivada.

Ejercicio 6: Dada la función g(x) = 12x + 5. Calcular su derivada.

Ejercicio 7: La evolución de la fiebre de un enfermo en función del tiempo viene dado por la función $f(t) = -t^2 + 4t + 38$, donde t viene dado en horas y f(t) en grados. ¿Cuál será la derivada de esta función a las cero horas, a la hora y a las dos horas? ¿Cuándo alcanza la temperatura máxima?

Es evidente que si complicamos la función f el cálculo de la derivada será muy difícil, por ello es necesario buscar una forma más cómoda de realizar dichos cálculos. ¿Observas alguna reglilla que nos facilite el cálculo de derivadas?

7.2 REGLAS DE DERIVACIÓN.

REGLAS DE DERIVACIÓN			
$y = k$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = n\,x^{n-1}$	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = a^x$	$y = a^x \,.\, Lna$	$y = e^x$	$y = e^x$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x}\log_a e$	$y = Lnx$	$y' = \frac{1}{x}$
Derivada de algunas operaciones con funciones			
$y = f(x) + g(x)$	$y' = f'(x) + g'(x)$	$y = k \,.\, f(x)$	$y' = k \,.\, f'(x)$
$y = f(x) \,.\, g(x)$	$y' = f'(x).g(x) + f(x).\, g'(x)$	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
Derivada de la composición de funciones, regla de la cadena. Derivada de la función inversa.			
$y = g[f(x)]$	$y' = g'[f(x)]f'(x)$		

Ejercicio 8: Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$f(x) = 2$

$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{5}$

$f(x) = x$

$f(x) = 2x + 1$

$f(x) = 4x - 5$

$f(x) = 6 - 3x$

$f(x) = x^2$

$f(x) = x^3$

$f(x) = x^5$

$f(x) = x^7$

$f(x) = x^6$

$f(x) = x^{20}$

$f(x) = 2x^2$

$f(x) = 4x^3$

$f(x) = -5x^6$

$f(x) = -4x^3 + 2x - 1$

$f(x) = 3x^2 + 4x - 8$

$f(x) = x^5 - 4x^3$

$f(x) = \sqrt{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2$

$f(x) = (x + 1)^2$

$f(x) = (x + 1)^3$

$f(x) = (2x - 1)^2$

$f(x) = (x^2 + 1)^5$

$f(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

$f(x) = \frac{1}{x^4}$

$f(x) = \frac{1}{x^{20}}$

$f(x) = \frac{2}{x}$

$f(x) = \frac{1}{3x^2}$

$f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = \sqrt{2x}$

$f(x) = \sqrt{3x^3}$

$f(x) = 2\sqrt{x}$

$f(x) = e^x$

$f(x) = 2^x$

$f(x) = 5^x$

$f(x) = e^{x+2}$

$f(x) = e^{x^2}$

$f(x) = e^{2x^3+5}$

$f(x) = \log_2 x$

$f(x) = \log_3 x$

$f(x) = \log_5 x$

$f(x) = \log_5(x + 3)$

$f(x) = \mathrm{Ln}\,(x + 5)$

$f(x) = \mathrm{Ln}\,(x^2 + 1)$

$f(x) = \mathrm{Ln}\,\sqrt{x}$

$f(x) = \dfrac{x}{x+3}$

$f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$

$f(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$

$f(x) = x \,.\, \mathrm{Ln}\, x$

$f(x) = (x^2 + 1) \,.\, e^x$