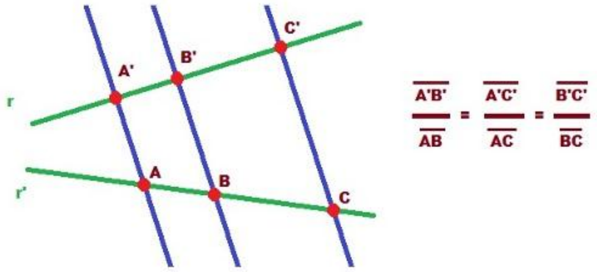
Unidades Didácticas 6 y 7: Semejanza y Trigonometría

6.1 Semejanzas, homotecias y escalas.
7.1 Razones trigonométricas. Sistema sexagesimal-radianes.
7.2 Propiedades de las razones a partir de la circunferencia goniométrica.
7.3 Resolución de problemas trigonométricos reales.
7.4 Ecuaciones trigonométricas.

6.1 SEMEJANZA, HOMOTECIA Y ESCALAS.

El Teorema de Tales dice que los segmentos determinados al cortar dos rectas secantes por una serie de rectas paralelas son proporcionales entre sí:



Dos triángulos, que tienen un vértice en común, están en **posición de Tales** cuando sus lados son paralelos. En consecuencia sus tres ángulos son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales. *Dibujaremos en clase dos triángulos en posición de Tales, indicando como se nombra y sus elementos: vértices, ángulos y lados. Indicar que el vértice da nombre al lado. Proporcionalidad de sus lados.*

Ejercicio 1: Aplica al siguiente dibujo una homotecia dónde el punto O esté a la izquierda de la imagen y de razón 3

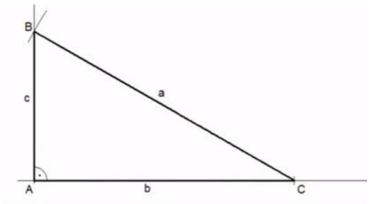
Para construir un triángulo no es necesario conocer todos sus elementos, **queda determinado**:

a) Por los tres lados. Dibujar un ejemplo.
b) Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. Dibujar un ejemplo.
c) Un lado y los dos ángulos adyacentes. Dibujar un ejemplo.

Dos **triángulos son semejantes** (por tanto tienen los tres ángulos iguales y lados proporcionales) si:

a) Si tienen dos pares de ángulos iguales.
b) Si tienen dos pares de lados proporcionales y el par de ángulos comprendidos iguales.
c) Si tienen los tres pares de lados proporcionales.
d) Siendo el triángulo rectángulo, si tienen un mismo ángulo agudo.
e) Siendo el triángulo rectángulo, si tienen dos pares de lados homólogos proporcionales.

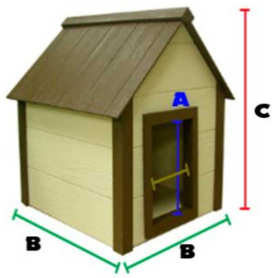
Recordemos el **Teorema de Pitágoras**, que se verifica en los triángulos rectángulos:



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ejercicio 2: Una central lechera comercializa su leche en dos tipos de tetrabriks. Ambos son semejantes y sus alturas miden 10 cm y 20 cm, respectivamente. Calcula la capacidad del tetrabrik más pequeño sabiendo que la del mayor es de 2 litros.

Ejercicio 3:



En la publicidad de la tienda OKI, Pedro ha visto las medidas de una caseta para su perro. A = 2 cm, B = 4 cm, C = 3 cm y el ancho de la puerta es de 2 cm. Sabiendo que la maqueta está a escala 1:50, averigua si su perro que mide 75 cm de alto puede entrar. ¿Cuánto cm^2 de tela necesita para hacerle un cojín que cubra el suelo de la caseta?

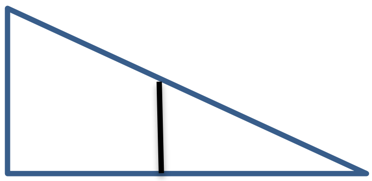
Ejercicio 4: En un mapa de las carreteras de Andalucía medimos la distancia de Mijas a Torre del Mar, obteniendo 7 cm. Calcula la distancia real sabiendo que hemos utilizado una escala 1:1000000.

Ejercicio 5: Dibuja a escala 1:50 tu dormitorio, no olvides indicar los siguientes elementos, si están en tu dormitorio: puerta, ventana, cama, armario y mesa.

7.1 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS. SISTEMA SEXAGESIMAL Y RADIANES.

La palabra trigonometría deriva de tres vocablos tri-tres, gono-ángulo y metría-medida. Estudia la relación entre las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos de cualquier triángulo. Surge de la necesidad de predecir fenómenos como eclipses, inundaciones del Nilo, etc. También es de gran utilidad en la astronomía para el cálculo de distancias lineales y angulares, en la navegación calendarios cartografía, etc. Con la trigonometría veremos como relacionar las razones trigonométricas de los ángulos de un triángulo rectángulo con sus lados y con ello resolveremos diversos problemas de medidas (la anchura del río, la altura de un edificio, etc.)

De la proporcionalidad de los lados obtenemos la definición de las **razones trigonométricas** de la siguiente forma:



$$CosC = \frac{\text{cat contiguo}}{\text{hipotenusa}} \qquad senC = \frac{\text{cat opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$tagC = \frac{\text{cat opuesto}}{\text{cat contiguo}} = \frac{senC}{cosC} \qquad cotagC = \frac{\text{cat contiguo}}{\text{cat opuesto}} = \frac{cosC}{senC}$$

$$secC = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat contiguo}} = \frac{1}{cosC} \qquad cosecC = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat opuesto}} = \frac{1}{senC}$$

Ejercicio 6: Resuelve un triángulo rectángulo, sabiendo que la tangente de uno de sus ángulos agudos es 3´5 y que el cateto opuesto a este ángulo mide 2 cm.
Ejercicio 7: Calcula, de forma aproximada, las razones trigonométricas de un ángulo de 30º.
Ejercicio 8: Calcula, de forma aproximada, las razones trigonométricas de un ángulo de 45º.
Ejercicio 9: Halla las razones trigonométricas de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 cm y 4 cm.

Tres son los sistemas de medidas de ángulos, nosotros solo trabajaremos con dos: grados sexagesimales (considera la circunferencia dividida en 360º partes iguales) y radianes (teniendo en cuenta que el perímetro de una circunferencia es $2\pi r$ y el radio de la circunferencia goniométrica es 1). Recordemos que los grados sexagesimales no se pueden representar en una recta pero los radianes sí. Para pasar de uno a otro simplemente tenemos que aplicar una regla de tres teniendo en cuenta que 180º equivale a π.

Ejercicio 10: Indica a cuántos radianes corresponden los siguientes ángulos en grados sexagesimales:
a) 30º b) 60º c) 90º d) 180º e) 85º
Ejercicio 11: Indica a cuántos grados sexagesimales corresponden los siguientes ángulos dados en radianes:
a) $3\pi/2$ b) $\pi/4$ c) 3 d) 2 e) 2π

7.2 PROPIEDADES DE LAS RAZONES A PARTIR DE LA CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA

Sobre la **circunferencia goniométrica** podemos representar un ángulo, su seno y su coseno, situándonos en los distintos cuadrantes. En consecuencia, los valores del seno y del coseno se encuentran entre –1 y 1.

Ejercicio 12: Di si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) El seno de un ángulo vale 0´5.
b) El coseno de un ángulo vale - 0´75.
c) El seno de un ángulo vale 1´5.

Ejercicio 13: Si $\cos\alpha = -1'11$, indica cuál de las siguientes afirmaciones es cierta y razona tu respuesta:

a) α es un ángulo negativo.
b) α está en el tercer cuadrante.
c) α es un ángulo mayor que 2π.
d) Es imposible que el coseno de un ángulo sea $-1'11$.

Ejercicio 14: Señala en que cuadrante está el ángulo α si:

a) $\text{sen}\alpha > 0$ y $\cos\alpha < 0$ b) $\text{sen}\alpha < 0$ y $\text{tg}\alpha > 0$

c) $\text{sen}\alpha < 0$ y $\cos\alpha < 0$ d) $\text{tg}\alpha < 0$ y $\cos\alpha > 0$

Ejercicio 15: Sabiendo que $\text{sen}\alpha = 3/4$ y que α es un ángulo del primer cuadrante. Calcula:

a) $\text{sen}(180° - \alpha)$ b) $\text{sen}(180° + \alpha)$ c) $\text{sen}(360° - \alpha)$

Ejercicio 16: Señala si las siguientes igualdades son ciertas o no. En este último caso, escribe la igualdad correcta.

a) $\text{sen}\alpha = \text{sen}(180° + \alpha)$ b) $\cos\alpha = \text{sen}(90° + \alpha)$ c) $\text{tg}\alpha = [\text{tg}(3\pi/2 - \alpha)]^{-1}$

Teorema fundamental de la trigonometría $\cos^2x + \text{sen}^2x = 1$

En consecuencia tenemos dos fórmulas más: $1 + \text{tg}^2x = \sec^2x$

$1 + \text{cotg}^2x = \text{cosec}^2x$

Ejercicio 17: ¿Es posible que exista un ángulo que verifique simultáneamente $\text{sen}\alpha = 3/5$ y $\cos\alpha = 2/5$? Razona.

Ejercicio 18: Demuestra $1 + \text{tg}^2x = \sec^2x$

Ejercicio 19: Si $\text{sen}\alpha = -0'3$ y $180° < \alpha < 270°$. Calcular las demás razones.

Ejercicio 20: Si $\cos\alpha = 0'65$ y $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$. Calcular las demás razones.

Ejercicio 21: Si $\text{tag}\alpha = -4$ y $\pi/2 < \alpha < \pi$. Calcular las demás razones.

Ejercicio 22: Calcular las razones trigonométricas de los siguientes ángulos sabiendo que:

a) $\text{sen}\alpha = 2/5$ $\alpha \in II$ calcular $\cos\alpha$ y $\text{tg}\alpha$ b) $\cos\alpha = -4/5$ $\alpha \in III$ calcular $\text{sen}\alpha$ y $\text{tg}\alpha$

c) $\text{sen}\alpha = -2$ $180° \le \alpha \le 270°$ $\text{cotg}\alpha$ d) $\cos\alpha = 0'3$ $270° \le \alpha \le 360°$ $\sec\alpha$ y $\text{cotg}\alpha$

e) $\text{tg}\alpha = -2$ $\text{sen}\alpha > 0$ $\text{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ f) $\cos\alpha = 1/5$ $\text{tg}\alpha > 0$ $\cos\alpha$ y $\text{cosec}\alpha$

Algunos ángulos del primer cuadrante son más conocidos que otros: **0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180° y 270°**. Podemos calcular sus razones trigonométricas de a través de un triángulo equilátero de lado 1 u. Pero nosotros lo haremos con una tabla "mágica" y con la ayuda de la circunferencia goniométrica, el seno y coseno de 180° y 270°.

Ejercicio 23: Completa las tablas anteriores con tangente, cotangente, secante y cosecante de 0º, 30º, 45º, 60º, 90º, 180º y 270º.

Ejercicio 24: Calcula las razones trigonométricas de 150º, 210º y 330º.

Ejercicio 25: Calcula las razones trigonométricas de 120º a partir de 30º.

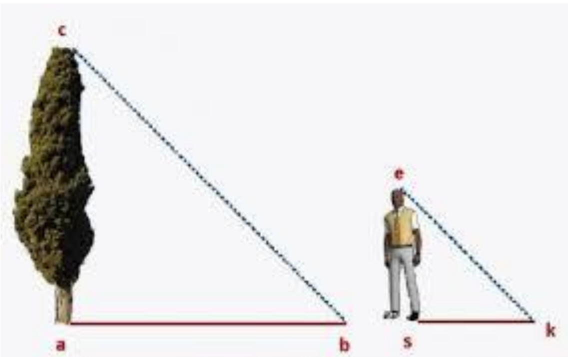
Ejercicio 26: Calcula, reduciendo al primer cuadrante:

a) sen150º	b) cos225º	c) sen(315º)	d) cosec120º
e) cotg240º	f) sec135º	g) tag315º	h) sec(-120º)

Cuando en la circunferencia goniométrica giramos en el sentido de las agujas del reloj, el ángulo es negativo. Y un ángulo mayor de 360º, significa que hemos dado más de una vuelta (hacerles ver que las razones no dependen de las vueltas, que dichos ángulos tienen las mismas razones que un ángulo de la primera vuelta. Nosotros tendremos que buscar a dicho ángulo)

Ejercicio 27: Calcula, sin utilizar la calculadora, sen1500º, sen(-45º), sen(4π/3), cos2745º y tg2010º. No olvides encontrar el ángulo de la primera vuelta que tiene las mismas razones.

7.3 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS TRIGONOMÉTRICOS REALES.



Ejercicio 28: Calcula el ángulo de elevación del Sol sobre el horizonte, sabiendo que una estatua proyecta una sombra que mide 3 veces su altura.

Ejercicio 29: Un grupo de bomberos intenta llegar con una escalera de 5 m de longitud a una ventana de un edificio situada a 4 m del suelo, de donde sale una densa nube de humo. ¿A qué distancia de la pared del edificio habrán de colocar el pie de la escalera para poder entrar por la ventana?

Ejercicio 30: Calcula los ángulos de un rombo sabiendo que la longitud de sus lados es de 5 cm y que sus diagonales miden 6 cm y 8 cm.

Ejercicio 31: Resuelve los triángulos rectángulos sabiendo que:

a) a=4 cm, C = 25º b) b=3 cm, B=35º c) a=10 cm, b=5cm

Ejercicio 32: Desde un helicóptero que vuela a 300 m de altura se observa un pueblo, bajo un ángulo de depresión de 25°. Calcula la distancia del helicóptero al pueblo medida sobre la horizontal.

Ejercicio 33: El ángulo desigual de un triángulo isósceles es de 25°. Los lados iguales miden 7 cm cada uno. Calcula el área del triángulo.

Ejercicio 34: Un club náutico dispone de una rampa para efectuar saltos de esquí acuático. Esta rampa tiene una longitud de 8 m y su punto más elevado se encuentra a 2 m sobre el nivel del agua. Si se pretende que los esquiadores salgan desde un punto situado a 2´5 m de altura, ¿cuántos metros hay que alargar la rampa sin variar el ángulo de inclinación?

Ejercicio 35: Desde dos puntos distantes entre sí 3 Km se observa un globo sonda. El ángulo de elevación desde uno de los puntos, A, es de 24°, y desde el otro, B, 36°. ¿Cuál es el punto más próximo al globo sonda? ¿Y la altura del globo?

Ejercicio 36: Observamos la cima de una montaña bajo un ángulo de elevación de 67°. Cuando nos alejamos 300 m, el ángulo de elevación es de 27°. Calcula la altura de la montaña.

Ejercicio 37: Desde un punto observamos la copa de un árbol bajo un ángulo de 40°. Desde ese mismo punto, pero a una altura de 2 m, vemos la copa bajo un ángulo de 20°. Calcula la altura del árbol y la distancia a la que nos encontramos de él.

7.4 Ecuaciones trigonométricas.

Una **ecuación trigonométrica** es una ecuación en la que intervienen las razones trigonométricas de uno o más ángulos. Resolver una ecuación trigonométrica implica calcular <u>todos</u> los ángulos para los cuales es cierta dicha igualdad.

Al resolver una ecuación trigonométrica debemos tener en cuenta: 1) En las ecuaciones trigonométricas debemos observar si el resultado tiene sentido: cotag0°. 2) No debemos olvidar que el seno y el coseno varían entre -1 y 1. 3) Debemos tener cuidado con los signos de las razones trigonométricas teniendo en cuenta el cuadrante del ángulo. 4) Recordar que no toda ecuación tiene solución. 5) Un ángulo no es único sirve él y todas sus vueltas. 6) Expresaremos la solución en grados y radianes.

Ejercicio 38: Resuelve las siguientes ecuaciones y sistemas trigonométricos:

a) $\operatorname{sen}x = \frac{1}{2}$	b) $\cos x = 1$	c) $2\operatorname{sen}x + 1 = 0$
d) $\operatorname{sen}x + 3 = 5$	e) $2\operatorname{sen}x + 2 = 0$	f) $2\cos x - 1 = 0$
g) $2\operatorname{tg}x - 4 = -2$	h) $\cos^2 x = 1$	i) $\cos^2 x - \cos x = 0$