TEMA 12: GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.

12.1 Posiciones relativas.
12.2 Ángulos.
12.3 Distancias.
12.4 Ejercicios tipos.

## 12.1 POSICIONES RELATIVAS.

a) De un punto con recta y plano:
a1) Un punto A **pertenece** a una recta r si cumple sus ecuaciones generales, en caso contrario se dice que no pertenece.
a2) Un punto A **pertenece** a un plano si verifica su ecuación general.

Ejercicio 1: Averigua si los puntos A(1, -1, 0) y B(2, 1, -3) pertenece a la siguiente rectas o planos:

a) $\left.\begin{array}{l} x=-2+2t \\ y=-1+t \\ z=-1+2t \end{array}\right\}$ b) $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-2}$ c) $\left.\begin{array}{l} x-2y+z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{array}\right\}$ d) $2x - y + 3 = 0$

b) De dos rectas $r(A_r,\vec{u}_r)$ y $s(B_s,\vec{u}_s)$

Geométricamente:

| Se cruzan | Se cortan | Paralelas | Coincidentes |
|---|---|---|---|
| $Rg(\vec{u}_r,\vec{u}_s)=2$ | $Rg(\vec{u}_r,\vec{u}_s)=2$ | $Rg(\vec{u}_r,\vec{u}_s)=1$ | $Rg(\vec{u}_r,\vec{u}_s)=1$ |
| $Rg(\vec{u}_r,\vec{u}_s,\overrightarrow{A_rB_s})=3$ | $Rg(\vec{u}_r,\vec{u}_s,\overrightarrow{A_rB_s})=2$ | $Rg(\vec{u}_r,\vec{u}_s,\overrightarrow{A_rB_s})=2$ | $Rg(\vec{u}_r,\vec{u}_s,\overrightarrow{A_rB_s})=1$ |

Siendo $r:\left.\begin{array}{c} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right\}$ y $s:\left.\begin{array}{c} A''x+B''y+C''z+D''=0 \\ A'''x+B'''y+C'''z+D'''=0 \end{array}\right\}$, siendo

$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix}$ y $M^*=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix}$

Analíticamente

| Se cruzan | Se cortan | Paralelas | Coincidentes |
|---|---|---|---|
| rgM = 3<br>rgM´ = 4 | rgM = 3<br>rgM´ = 3 | rgM = 2<br>rgM´ = 3 | rgM = 2<br>rgM´ = 2 |

Ejercicio 2: (107) Estudia la posición relativa de las rectas r y s en los siguientes casos:

a) $r:\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{2}=z+1$ $s:\frac{x+2}{1}=\frac{y+8}{2}=z+5$

b) $r:\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$ $s:\left.\begin{array}{l} x=2t \\ y=-2t \\ z=-3t \end{array}\right\}$

c) r: x = -y = z $\quad$ s: $\left.\begin{array}{l} x=-t \\ y=t \\ z=-t \end{array}\right\}$

d) r: $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ $\quad$ s: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{2}=z$

e) r: $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-5}{4}$ $\quad$ s: $\left.\begin{array}{l} x=-3+t \\ y=-5-t \\ z=6+3t \end{array}\right\}$

Ejercicio 3: (116) Dadas las rectas r: $\left.\begin{array}{l} x-kz=2 \\ y-z=-3 \end{array}\right\}$ s: $\frac{x-1}{2}=y+1=z$ ¿Existe algún valor de k que provoque que estas rectas sean secantes?

Ejercicio 4: (117) Dadas las rectas r: $\left.\begin{array}{l} x+y-z=-6 \\ 2x-z=-2 \end{array}\right\}$ s: $\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+1}{2}$ Estudia las posiciones relativas según los valores de m.

c) <u>de una recta y un plano</u>: Siendo $A_r$ un punto de la recta r y $\vec{u}_r$ un vector director y $\vec{n}$ un vector normal del plano

Geométricamente:

| Se cortan | Paralelas | Contenida |
|---|---|---|
| $\vec{u}_r \cdot \vec{n} \neq 0$ | $\vec{u}_r \cdot \vec{n} = 0$ | $\vec{u}_r \cdot \vec{n} = 0$ |
| | $A_r \notin \alpha$ | $A_r \in \alpha$ |

Siendo r: $\left.\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right\}$ y $\alpha: A''x+B''y+C''z+D''=0$, siendo M= $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$

y M*= $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$

Analíticamente

| Se cortan | Paralelas | Contenida |
|---|---|---|
| rgM = 3<br>rgM´ = 3 | rgM = 2<br>rgM´ = 3 | rgM = 2<br>rgM´ = 2 |

Ejercicio 5: (105) Estudia la posición relativa del plano $\alpha$: x – y + 2z = 1 y las rectas siguientes en cada uno de los siguientes casos:

a) r: $\left.\begin{array}{l} x=1+t \\ y=-2t \\ z=3t \end{array}\right\}$ $\quad$ b) s: $\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{1}$ $\quad$ c) t: $\left.\begin{array}{l} x=1+2t \\ y=4t \\ z=t \end{array}\right\}$

Ejercicio 6: (106) En los siguientes casos, calcula el punto de intersección de la recta r con el plano $\alpha$:

a) r: x = - y = z $\quad$ $\alpha$: 2x + y - z = 0

b) r: $\left.\begin{array}{l} x = 10 - 3t \\ y = -7 + 2t \\ z = -1 + t \end{array}\right\}$ $\alpha$:3x + 2y - z + 1 = 0

Ejercicio 7: (145) Considera la recta r: $\left.\begin{array}{l} x - y + 2z = 7 \\ x - y - 5z = -8 \end{array}\right\}$ y el plano ax + 2y + z = b.

a) Calcula los valores de a y de b para que la recta sea paralela al plano.
b) Calcula los valores de a y de b para la recta corte al plano.
c) Calcula los valores de a y de b para que la recta esté contenida en el plano.

d) <u>de dos planos a partir de sus ecuaciones generales</u>:

| Se cortan | Paralelos | Coincidentes |
|---|---|---|
| $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ | $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$ | $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$ |

Ejercicio 8: (103) Estudia la posición relativa de los dos planos $\pi_1$ y $\pi_2$ en los siguientes casos:

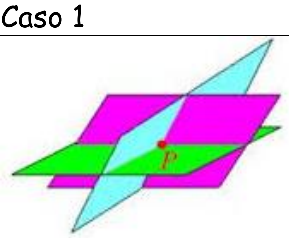
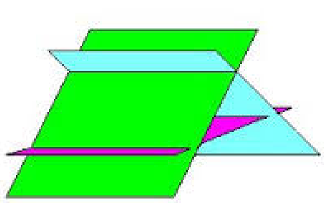
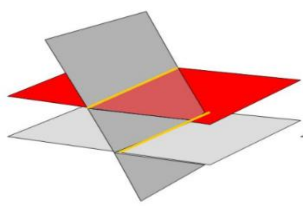
a) $\pi_1$: 2x – y + z = 0 y $\pi_2$: -2x + y + z = 1
b) $\pi_1$: 2x – y + z = 0 y $\pi_2$: -4x + 2y - 2z = 1
c) $\pi_1$: 2x – y + z = 0 y $\pi_2$: -4x + 2y - 2z = 0
d) $\pi_1$: x + y - 1 = 0 y $\pi_2$: x + z – 2 = 0

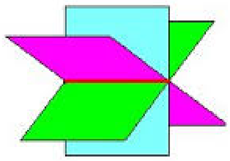
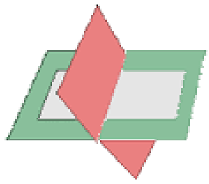
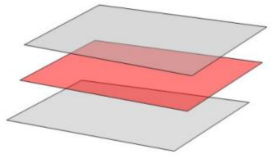
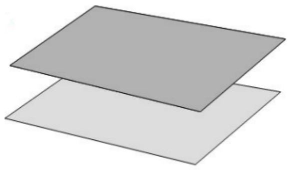
Ejercicio 9: Dados los planos $\pi_1$: ax + 9y - 3z = 8 y $\pi_2$: x + ay - z = 0. Calcular a para que:

a) Sean paralelas.
b) Sean perpendiculares.
c) La recta intersección corta al plano OXY en un punto A cuya distancia al origen es $\sqrt{2}$.

e) <u>de tres planos</u>: A partir de las ecuaciones generales, siendo M la matriz formada por los coeficientes de las 3 ecuaciones generales:

| Caso 1 | Caso 2 | Caso 3 | Caso 4 | Caso 5 |
|---|---|---|---|---|
| Se cortan en un punto | - Se cortan dos a dos<br>- Uno corta a dos paralelos | - 3 planos se cortan en una recta<br>- 2 coincidentes y el 3º los corta | - 3 Paralelos<br>- 2 paralelos y 1 coincidente | Coincidentes |
| rgM = 3<br>rgM´ = 3 | rgM = 2<br>rgM´ = 3 | rgM = 2<br>rgM´ = 2 | rgM = 1<br>rgM´ = 2 | rgM = 1<br>rgM´ = 1 |

| Caso 1 | Caso 2 | Caso 2 |
|---|---|---|
|  |  |  |

| Caso 3 | Caso 3 | Caso 4 |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| Caso 4 | Caso 5 | |
|  | **Tres planos coincidentes** | |

Ejercicio 10: (104) Estudia la posición relativa de los tres planos $\pi_1$, $\pi_2$ y $\pi_3$ en los casos siguientes:

a) $\pi_1$: 2x – y + z = 0, $\pi_2$: 3x + y + 4z = 0 y $\pi_3$: x + y - z = 3
b) $\pi_1$: 2x + y - z = 0, $\pi_2$: x + y - z = 0 y $\pi_3$: x + 2z = 1
c) $\pi_1$: x + y - z = 0, $\pi_2$: 3x + 2y + 1 = 0 y $\pi_3$: x + 2z + 1 = 0
d) $\pi_1$: -2x – y + 3z = 3, $\pi_2$: 6x + 3y - 9z = -9 y $\pi_3$: -10x - 5y + 15z = 15
e) $\pi_1$: 2x – y + z = 0, $\pi_2$: x - 2y + 3z = 1 y $\pi_3$: 3x - 3y + 4z = 1
f) $\pi_1$: 2x – 4y + 6z + 1 = 0, $\pi_2$: x + 2y + z = 0 y $\pi_3$: x - 2y + 3z – 1 = 0
g) $\pi_1$: 2x – y + 3z = 4, $\pi_2$: x - 2y - z = -7 y $\pi_3$: -2x + y - z = 2
h) $\pi_1$: x + y - z = 0, $\pi_2$: x - y + z = 0 y $\pi_3$: x = 0

Ejercicio 11: (148) Estudia la posición relativa de los siguientes planos según los diferentes valores de m, siendo $\pi_1$: mx + y + z = 1, $\pi_2$: x + my + z = 1 y $\pi_3$: x + y + mz = 1.

Ejercicio 12: (149) Calcula los valores de los parámetros a y b que hacen que los siguientes planos, $\pi_1$: x + 2y - z = 0, $\pi_2$: x + 2y - 2z + 1 = 0 y $\pi_3$: ax + 2y + bz – 1 = 0, se corten en una misma recta.

Ejercicio 13: (150) Estudia la posición relativa de los siguientes planos según los diferentes valores de m y n, siendo $\pi_1$: x + y + z = 1, $\pi_2$: x + 2y + 3z = 1 y $\pi_3$: y + mz = n.

## 12.2 ÁNGULOS EN EL ESPACIO.

El ángulo entre distintos elementos del espacio no depende de la posición relativa.

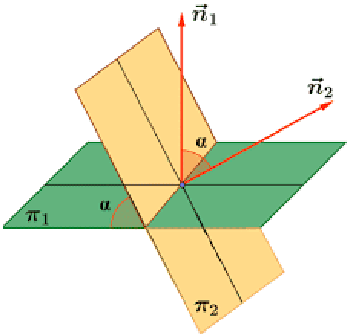
a) De dos rectas que se cortan es el menor de los ángulos que forman en el plano que determinan. Si las rectas se cruzan, es el ángulo formado por las rectas secantes paralelas a las dadas. El ángulo de dos rectas varía de 0º a 90º. Se dicen que son **perpendiculares** si forman un ángulo de 90º. $\cos(\widehat{rs}) = \left|\cos(\widehat{\vec{u}_r\vec{u}_s})\right|$

Ejercicio 14: (47) Calcula el ángulo que forman las rectas r y s.

a) r: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{2}$ s: $\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - t \end{array}\right\}$

b) r: $\left.\begin{array}{l} x + y = 4 \\ 2y - z = 4 \end{array}\right\}$ s: $\left.\begin{array}{l} x - 2y = 10 \\ y + z = 0 \end{array}\right\}$

b) De dos planos (que se cortan) es el menor de los ángulos diedros que determinan.



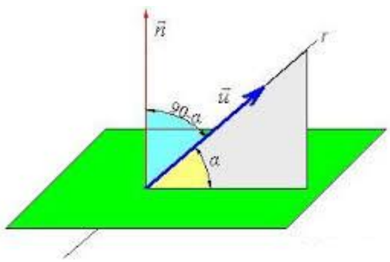

Varían de 0° a 90°.

$\cos(\widehat{\alpha\beta}) = \left|\cos(\widehat{\vec{n}_\alpha \vec{n}_\beta})\right|$

Ejercicio 15: (48) ¿Cuánto mide el ángulo que forman los planos $\pi_1$ y $\pi_2$?

a) $\pi_1$: 2x + 3y – z + 6 = 0 y $\pi_2$: 2y - z + 5 = 0
b) $\pi_1$: 2x – 3y + 2z – 6 = 0 y $\pi_2$: 3x + 6y + 6z – 1 = 0
c) $\pi_1$: x – 2y + z – 1 = 0 y $\pi_2$: 2x + 2y + z – 3 = 0

c) De una recta y un plano es el ángulo que forma la proyección de r sobre el plano.




Varía de 0° a 90°.

$\text{sen}(\widehat{\alpha r}) = \left|\cos(\widehat{\vec{n}_\alpha \vec{u}_r})\right|$

Ejercicio 16: (49) Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano $\pi$:

a) r: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-10}{-2}$ $\pi$:2x - y = 0
b) r: x = y = z $\pi$:2x - y + 2z = 0
c) r: $\left.\begin{array}{l} x = 1 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{array}\right\}$ $\pi$:x - 2y + 3z + 8 = 0

Ejercicio 17: (50) Halla el ángulo que forma la recta r, que pasa por los puntos P(2, -1, 0) y Q(-2, 0, 3), y el plano $\pi$: -2x + y - z - 3 = 0

## 12.3 DISTANCIAS EN EL ESPACIO.

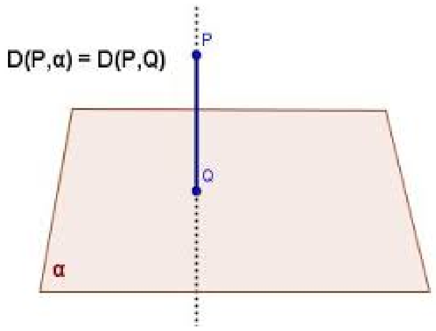
Antes de comenzar el cálculo de distancias es <u>necesario</u> realizar el estudio de la posición relativa. La prueba homologada exige que el cálculo de distancia sea razonado, pero veremos un tipo de ejercicios donde necesitamos utilizar las fórmulas.

a) Entre dos puntos A y B: d(A,B) = $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

Ejercicio 18: (55) Calcula el perímetro del triángulo de vértices A(4, -5, -2), B(-6, 10,3) y C(14, 0, 3). Comprueba que es rectángulo en A.

Ejercicio 19: (56) Halla el valor de a sabiendo que el segmento que tiene por extremos a los puntos A(-2, 3, 1) y B(-1, -1, a) tiene de longitud nueve unidades. ¿Hay una única solución?

b) De un pto. P externo a un plano: $d(P,\alpha) = \dfrac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ siendo $\alpha$:Ax +By +Cz + D = 0 y P = ($a_1$ ,$a_2$ ,$a_3$). De forma razonada:




1) Calcula la recta perpendicular al plano que pasa por P
2) Cálculo del punto de corte de la recta y el plano, Q.
3) $d(P,\alpha) = d(P,Q)$

Ejercicio 20: (57) Calcula la distancia entre el punto P y el plano $\pi$:

a) P(1, -2, 3) $\quad \pi: 2x + y + z + 3 = 0$
b) P(2, -2, 4) $\quad \pi: \left.\begin{array}{l} x = t + m \\ y = 1 - t + 2m \\ z = -2 + 2t + m \end{array}\right\}$

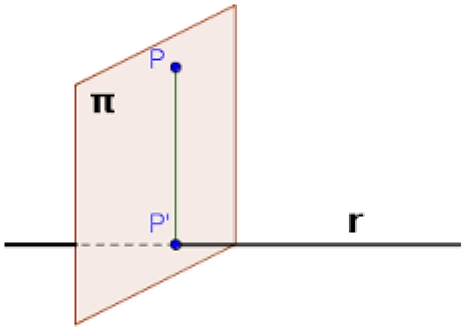
Ejercicio 21: (59) (números grandes) Calcula la distancia del punto P(-2, 1, 0) al plano que contiene a la recta r: $\left.\begin{array}{c} x + y + z - 2 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{array}\right\}$ y al punto Q(-1, 2, 6)

c) Entre dos planos paralelos: $d(\alpha,\beta) = d(A_\beta,\alpha)$

Ejercicio 22: (62) Calcula la distancia entre los siguientes planos paralelos:

a) $\pi_1$: x + y + z = 0 y $\pi_2$: 2x + 2y + 2z + 3 = 0
b) $\pi_1$: 3x – y = 0 y $\pi_2$: -2x + $\frac{2}{3}$y = 5

d) De un punto a una recta: $d(P,r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{PA_r} \times \vec{u}_r\right|}{\left|\vec{u}_r\right|}$




1) Se calcula el plano perpendicular a r que pasa por P.
2) Se calcula el pto. de corte entre el plano y la recta, P´.
3) d(P, r) = d(P, P´)

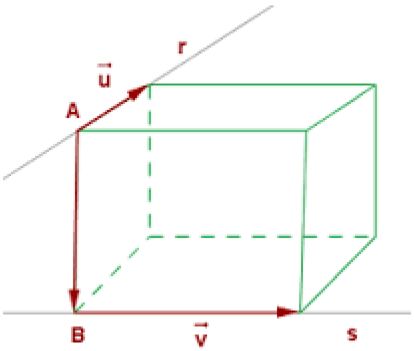
Ejercicio 23: (58) Halla la distancia entre el punto P y la recta r:

a) P(1, 0, -3) r: $\left.\begin{array}{c} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{array}\right\}$

b) P(-2, 1, 0) r: $\left.\begin{array}{c} x + y + z - 2 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{array}\right\}$

e) De dos rectas paralelas: $d(r,s) = d(A_r, s)$

f) Dos rectas que se cruzan: $d(r,s) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{A_s A_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s\right]\right|}{\left|\vec{u}_r \times \vec{u}_s\right|}$




1) Calcular la recta t que corta perpendicular a r y a s.
1.1 Calculamos el plano con el vector director de r y el vector perpendicular a r y s.
1.2 Calculamos el plano con el vector director de s y el vector perpendicular a r y s.
1.3 La intersección de los dos planos es la recta t.
2) Calcular el punto de corte de t con r, A.
3) Calcular el punto de corte de t con s, B.
4) d(r, s) = d(A, B)

**O bien, calculando el plano que contiene a s y paralelo a r. d(r,s) = d(Ar, plano) y dejar esto para los ejercicios tipos.

Ejercicio 24: (60) Dadas las rectas paralelas

r: $x = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}$ s: $\left.\begin{array}{c} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{array}\right\}$

Halla la distancia entre ellas. (tener en cuenta qué si no nos dicen que son paralelas, lo primero es estudiar la posición relativa)

Ejercicio 25: (64) Dadas las rectas r: $x = y = \frac{z}{-1}$ s: $\left.\begin{array}{r} x = 1 + t \\ y = t \\ z = t \end{array}\right\}$

a) Demuestra que se cruzan.
b) Calcula la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r.
c) Demuestra que P(2, 2, -2) es un punto de r y calcula la distancia de P al plano calculado en el apartado b.
d) Calcula la distancia entre r y s.

Ejercicio 26: (61) Estudia la posición relativa de las rectas r y s y calcula la mínima distancia que las separa:

a) r: $x = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ s: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$

b) $r$: $\left.\begin{array}{r} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{array}\right\}$ s: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-2}$

c) r: $\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{array}\right\}$ $s$: $\left.\begin{array}{r} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{array}\right\}$

g) De una recta a un plano (paralelos): $d(r,\alpha) = d(A_r,\alpha)$

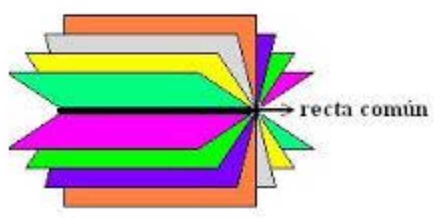
Ejercicio 27: (63) Dada la recta r: $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = z$ y el plano $\pi$: 2x + y - z = 2:

a) Demuestra que la recta es paralela al plano.
b) Calcula la distancia que separa la recta del plano.

## 12.4 EJERCICIOS TIPOS.

1) **Haz de planos paralelos:** Dado una plano $\pi_1$:Ax + By + Cz + D = 0, los planos paralelos a $\pi_1$ (haz de planos paralelos) son de la forma Ax + By + Cz + k = 0 con k número real.

2) **Haz de planos secantes**: Dado una recta r, el conjunto de todos los planos que pasan por r se llama **haz de planos secantes** y a r se le llama **arista del haz**. Siendo r: $\left.\begin{array}{r} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array}\right\}$, cualquier plano tiene la forma:
Ax + By + Cz + D + a(A´x + B´y + C´z + D´) = 0

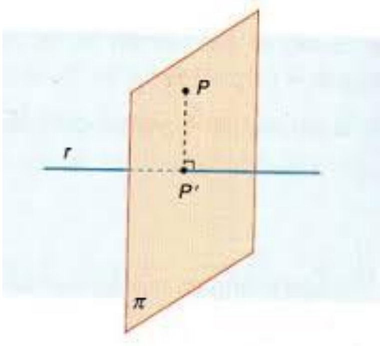



Ejercicio 28: Escribe la ecuación de haz de planos paralelos, tal que uno de ellos pase por los puntos por los puntos A(-2, 1, 1), B(3, 0, -3) y C(-2, 1, 4).

Ejercicio 29: Escribe la ecuación del haz de planos secantes que pasa por r:

a) $r: \left.\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 1 - 2t \end{array}\right\}$  b) r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}$

3) **Proyección ortogonal de un punto sobre una recta**: Sea r una recta y P un punto exterior a ella (posición relativa para comprobarlo), la proyección de P sobre r es un punto P´de r, siendo PP´ un vector perpendicular a r. Para calcularlo seguimos los siguientes pasos:



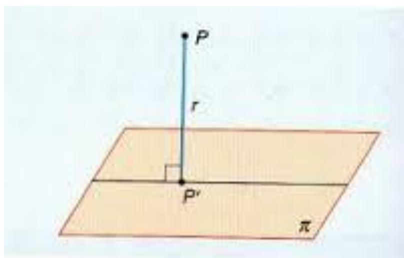

a) Calcula el plano perpendicular a r que pasa por P
b) P´es el punto intersección del plano y la recta
Observación: d(P,P´) = d(P,r)

4) **El punto simétrico de P respecto de la recta r** es el punto P´ de forma que $P_o$ es el punto medio de P y P´. Para calcular P´ seguimos los siguientes pasos:
a) Calcula el plano perpendicular a r que pasa por P
b) $P_o$ es el punto intersección del plano y la recta
c) Calcular P´ sabiendo que $P_o = \dfrac{P + P'}{2}$

Ejercicio 30: Dado el punto A(-3, 0, -4) y la recta r: $\left.\begin{array}{l} x - y = -2 \\ y + z = 2 \end{array}\right\}$, calcula el punto simétrico de A respecto de la recta y la distancia del punto a la recta.

5) **Proyección de un punto sobre un plano**: Sea $\pi$ un plano y P un punto exterior a él (posición relativa para comprobarlo), la proyección de P sobre $\pi$ es un punto P´ de $\pi$, siendo PP´ un vector perpendicular a $\pi$. Para calcularlo seguimos los siguientes pasos:

a) Calcula la recta perpendicular a $\pi$ que pasa por P
b) P´ es el punto intersección del plano y la recta
Observación: d(P, P´) = d(P, $\pi$)




6) **El punto simétrico de P respecto del plano** $\alpha$ es el punto P´ de forma que $P_o$ es el punto medio de P y P´. Para calcular P´ seguimos los siguientes pasos:

a) Calcula la recta perpendicular a $\alpha$ que pasa por P
b) $P_o$ es el punto intersección del plano y la recta

c) Calcular P´ sabiendo que $P_o = \frac{P + P'}{2}$

Ejercicio 31: Considera el plano $\pi \equiv$ x - y + 2z = 3 y el punto A = (-1, -4, 2)

a) Halla la ecuación de la recta perpendicular a $\pi$ que pasa por A.

b) Halla el punto simétrico de A respecto de $\pi$ .

7) **La proyección de una recta r sobre un plano** $\alpha$: Es otra recta s contenida en el plano $\alpha$ formada por todas las proyecciones ortogonales de todos los puntos de r sobre el plano. Es importante en estudiar en primer lugar la posición relativa:

7a) <u>Si la recta r es perpendicular al plano</u>, la proyección es el punto de corte.

7b) <u>Si la recta r es incidente con el plano $\alpha$</u>:
b.1 Calculamos A= $r \cap \alpha$.
b.2 tomamos un punto P cualquiera de r y calculamos $P_o$ su proyección ortogonal sobre el plano.
b.3 la proyección (que es una recta) pasa por los puntos A y $P_o$.

7c) <u>Si la recta y el plano son paralelos</u>,
b.1 tomamos un punto P cualquiera de r y calculamos $P_o$ su proyección ortogonal sobre el plano.
b.2 tomamos un punto Q cualquiera de r y calculamos $Q_o$ su proyección ortogonal sobre el plano.
b.3 La proyección es la recta que pasa por $P_o$ y $Q_o$.

Ejercicio 32: Halla la proyección ortogonal de la recta r de ecuación r: $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}$ sobre el plano $\pi$ de ecuación $\pi$: x + y - z = 4.

8) **La recta r simétrica respecto del plano** $\alpha$:

a) <u>Si la recta es incidente con el plano</u>,
b.1 Calculamos A= $r \cap \alpha$.
b.2 tomamos un punto P cualquiera de r y calculamos P´ su punto simétrico respecto del plano.
b.3 la recta simétrica pasa por los puntos A y P´.

Ejercicio 33: Sea el plano $\alpha \equiv 2x + y - z + 8 = 0$.

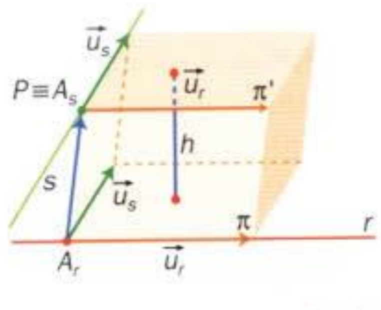
a) Calcula el punto P', simétrico del punto P = (2, −1, 5) respecto del plano $\alpha$.
b) Calcula la recta r', simétrica de la recta $r \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{1}$ respecto del plano $\alpha$.

b) <u>Si la recta y el plano son paralelos</u>,
b.1 tomamos un punto P cualquiera de r y calculamos

P´ su punto simétrico respecto del plano.
b.2 tomamos un punto Q cualquiera de r y calculamos Q´ su punto simétrico respecto del plano.
b.3 la recta simétrica pasa por los puntos Q´ y P´.

9) Calculo de una **recta perpendicular a dos rectas dadas r y s,** llamémosla t:
¡Lo primero es estudiar la posición relativa!
a) Si las rectas r y s se cortan, la recta t que les corta perpendicularmente tiene como dirección al vector $\vec{u}_r x \vec{u}_s$ y pasa por el punto de corte de r y s.

b) Si las rectas r y s se cruzan:
- Plano que pasa por $A_r$ y tiene como vectores directores a $\vec{u}_r x \vec{u}_s$ y $\vec{u}_r$
- Plano que pasa por $A_s$ y tiene como vectores directores a $\vec{u}_r x \vec{u}_s$ y $\vec{u}_s$
- La recta t buscada es la intersección de los dos planos.




Ejercicio 34: Sabiendo que las rectas r: x = y = z y $s: \left.\begin{matrix} x = 1+\mu \\ y = 3+\mu \\ z = -\mu \end{matrix}\right\}$ se cruzan, halla los puntos A y B, de r y s respectivamente que están a mínima distancia.

Ejercicio 35: Halla la perpendicular común a las rectas
$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = a \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = b \\ y = b-1 \\ z = -1 \end{cases}$$

10) Cálculo del **lugar geométrico**.

Ejercicio 36 resuelto: Indica el lugar geométrico formado por los puntos que equidistan de los siguientes planos: $\alpha$: 3x + y - 2z + 1 = 0 y $\beta$: x – 3y + 2z – 3 = 0

Resolución: se cumple d(P, $\alpha$) = d(P, $\beta$):

Siendo P = (a, b, c) tenemos $\frac{|3a+b-2c+1|}{\sqrt{14}} = \frac{|a-3b+2c-3|}{\sqrt{14}}$; del valor absoluto obtenemos dos ecuaciones:

a) 3a + b – 2c + 1 = a – 3b + 2c – 3;  2a + 4b – 4c + 4 = 0
b) 3a + b – 2c + 1 = - a + 3b - 2c + 3;  4a - 2b – 2 = 0

Dichas ecuaciones corresponden a dos planos, es decir, los puntos que equidistan forman dos planos.

Ejercicio 37: Determina el punto P de la recta r : $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{3}$ que equidista de los planos $\pi_1 \equiv x + y + z + 3 = 0$ y $\pi_2 : \left.\begin{array}{l} x=-3+\lambda \\ y=-\lambda+\mu \\ z=-6+\mu \end{array}\right\}$.

Ejercicio 38: Considera los puntos A = (1, 3, 1) y B = (3, 1, 1).
**a)** Determina la ecuación del plano respecto del cual B es el simétrico de A.
**b)** Siendo C = (5, 1, 5), calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

Ejercicio 39: Sea r la recta de ecuación $\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{4}=z$
a) Halla el punto de r que equidista del origen de coordenadas y del punto P = (4,–2, 2).
b) Determina el punto de la recta r más próximo al origen de coordenadas.

Ejercicio 40: Dados los puntos A(-1, 2, 0) y B(5, -2, 4), calcula las coordenadas del punto C que está situado en el interior del segmento de extremos A y B, tal que la distancia de C a B sea el triple que la distancia de C a A.

Ejercicio 41: Calcula el valor de a para que los puntos A(2, 0, -1), B(5, 2, -2) y C(1, a, a) pertenezcan a una misma recta.

Ejercicio 42: Calcula el valor de m para que los puntos del espacio A(0, 1, 2), B(1, 0, 3), C(1, m, 1) y D(m, -1, 2m) pertenezcan a un mismo plano.

SOLUCIONES:
Ejercicio 30: A´ = (- 13/3, 10/3, 14/3)
Ejercicio 31: a) r pasa por (-1, -4, 2) y su vector director (1, -1, 2) b) A´ = (- 7/3, - 8/3, - 2/3)
Ejercicio 32: La recta proyección pasa por M(11/3, 2/3, 1/3) y N(19/3, - 2/3, 5/3)
Ejercicio 33: a) P´ = (-16/3, -14/3, 26/3) b) r´ pasa por P´ y por B(-4, 8, 8)
Ejercicio 34: A(1, 1, 1) y B(0, 2, 1)
Ejercicio 35: las ecuaciones de la recta t que es perpendicular a r y s tiene de ecuaciones x + y – 2 = 0 y z + 1 = 0
Ejercicio 38: a) x – y = 0 b) 6 unidades cuadradas
Ejercicio 39: a) (7, 11, 3) b) (-11/13, 7/13, 5/13)
Ejercicio 40: C(2, 0, 2)
Ejercicio 41: a = -2/3
Ejercicio 42: m = 2 ó m = -2