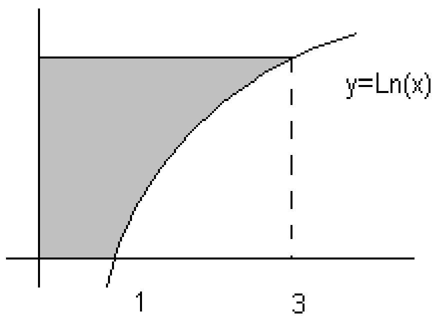
EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD DE INTEGRAL DEFINIDA.

Ejercicio 1. Considera la función f: $\Re \rightarrow \Re$ donde $f(x) = 2 + x - x^2$. Calcula α, $\alpha < 2$ de forma que $\int_{\alpha}^{2} f(x)dx = 9/2$.

Ejercicio 2. Calcula el valor de α, positivo, para que el área encerrada por la curva $y = \alpha x - x^2$ y el eje de abscisas sea 36. Representa la curva que se obtiene para dicho valor de α.

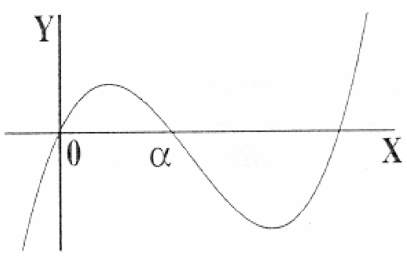
Ejercicio 3: Determina b sabiendo que b > 0 y que e! área de la región limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = bx$ es igual a 9/2.

Ejercicio 4. Siendo Ln(x) el logaritmo neperiano de x, halla el área de la superficie sombreada



Ejercicio 5. Consideremos $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

a) [1'5 puntos] Si f fuese la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando la respuesta:



i) $F(\alpha) = 0$.

ii) $F'(\alpha) = 0$.

iii) F es creciente en $(0, \alpha)$.

b) [1 punto] Calcula F(1) siendo $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$

Ejercicio 6: Se sabe que la función $f : (-1,+\infty) \rightarrow \Re$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \dfrac{x^2 + a}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$ es continua en $(-1,+\infty)$.

a) Halla el valor de a. ¿Es f derivable en x = 0?

b) Para a = 3, determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Ejercicio 7: De la función $f : (-1,+\infty) \to \Re$ se sabe que $f'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$ y que $f(2) = 0$.

a) Determina f.

b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0,1).

Ejercicio 8.

a) Dibuja el recinto limitado por las curvas $y = e^{x+2}$, $y = e^{-x}$ y $x = 0$.

b) Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.

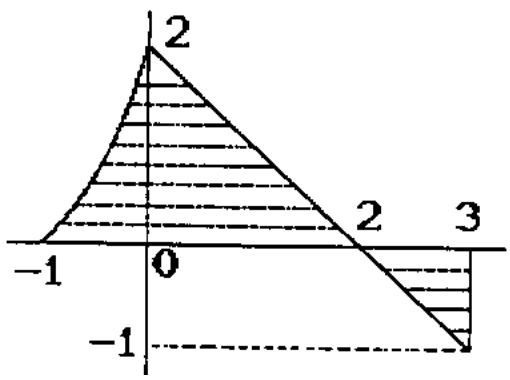
Ejercicio 9. Siendo Ln(x) el logaritmo neperiano de x, considera la siguiente función $f: (0, \infty) \to R$ definida por $f(x) = x\,Ln(x)$. Calcula:

a) $\int f(x)dx$

b) Una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto (1,0).

Ejercicio 10. De la función $f: R \to R$ se sabe que $f''(x) = x^2 + 2x + 2$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto P(1, 2). Halla la expresión de f.

Ejercicio 11. Halla el área del recinto rayado que aparece en la figura adjunta sabiendo que la parte curva tiene como ecuación $y = \dfrac{2x+2}{1-x}$



Del año 2018:

Ejercicio 12: Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x) = e^{2-x}$

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, la recta x + y = 3 y el eje de ordenadas.
c) Calcula el área del recinto limitado.

Ejercicio 13: Considera la función f: $(-e/2, +\infty) \rightarrow R$ definida por $f(x) = \ln(2x + e)$ donde ln denota logaritmo neperiano.

a) Haz un esbozo de la gráfica de f calculando sus puntos de corte con los ejes de coordenados.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y los ejes de coordenados.

Ejercicio 14: Considera la función f: $R \rightarrow R$ definida por $f(x) = e^{-2x}$

a) Determina el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y = -2ex$
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, la recta $y = -2ex$ y el eje de ordenadas
c) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior

Ejercicio 15: Siendo $a > 1$ considera el rectángulo de vértices A(1, 0), B(1,1), C(a,1) y D(a,0). La gráfica de la función f definida por $f(x) = \frac{1}{x^2}\ para\ x \neq 0$ divide al rectángulo anterior en dos recintos.

a) Haz un esbozo de la gráfica de f y del rectángulo descrito.
b) Determina el valor de a para que el que los dos recintos descritos tienen igual área.

Ejercicio 16: Dadas las funciones f y g: $R \rightarrow R$ donde $f(x) = -x^2 - x + 3$ y $g(x) = |x|$

a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula los puntos de corte entre las gráficas.
b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Del año 2019

Ejercicio 17: Dado un nº real $a > 0$, considera la función f: $R \rightarrow R$, con $f(x) = x^2 - ax$ y la recta $y = 2ax$. Determina a sabiendo que el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta anterior es 36.

Ejercicio 18: Sea f: $[0\ ,\ \pi/6] \rightarrow R$ una función continua y sea F la primitiva de f que cumple $F(0) = \pi/3$ y $F(\pi/6) = \pi$. Calcula:

(a) $\int_0^{\pi/6} (3f(x) - cos(x))\, dx$

(b) $\int_0^{\pi/6} sen(F(x))\, f(x)\, dx$

Ejercicio 19: Sea f: $R \rightarrow R$ la función dada por $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 8 & si\ x \leq 4 \\ x^2 - 6x + 8 & si\ x > 4 \end{cases}$

a) Calcula los puntos de corte entre la gráfica de f y la recta $y = 2x - 4$. Esboza el recinto que delimitan la gráfica de f y la recta.
b) Calcula el área del recinto anterior.

Ejercicio 20: Considera la función f: $R \rightarrow R$ dada por $f(x) = -4x^2 + a$ siendo $a > 0$ un número real. Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = 0$. Calcula a sabiendo que el área del recinto es 18.

Ejercicio 21: Sean las funciones f,g: [0, π] → R donde f(x) = sen(x) y g(x) = sen (2x)

a) Esboza sus gráficas en unos mismos ejes de coordenadas y calcula sus puntos de corte.
b) Calcula el área del recinto limitado por f, g y las rectas x = 0 y x = π/3.

Ejercicio 22: Sean las funciones f,g: [-π, π] → R donde f(x) = cos(x) y g(x) = sen (x)

a) Esboza sus gráficas en unos mismos ejes de coordenadas y calcula sus puntos de corte.
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones f y g en el intervalo [-3π/4, π/4]

Ejercicio 23: Sea la función f: R → R dada por f(x) = x e^{-x^2}

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenados y los extremos relativos de f (abscisas en los que se obtienen y valores que se alcanzan)
b) Determina a > 0 de manera que sea $\frac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de f en el intervalo [0, a] y el eje de abscisas.

Del año 2020

Ejercicio 24: Calcula el valor de a > 0 para que el área comprendida entre la parábola y = $3x^2$ -2ax y el eje de abscisas sea 4 unidades cuadradas.

Ejercicio 25: Dadas las funciones f, g: R → R definidas por f(x) = |x| y g(x) = x^2 – 2.

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza el recinto que determinan.

b) Determina el área del recinto anterior.

Ejercicio 26: Considera la función f : R → R definida por f(t) = $\frac{1}{1+e^t}$

a) Calcula $\int f(t)\, dt$ (Sugerencia: efectúa el cambio de variable x = 1 + e^t).

b) Se define g(x) = $\int_0^x f(t)\, dt$. Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x}$

Ejercicio 27: Calcula a > 0 sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función f(x) = xe^{3x}, el eje de abscisas y la recta x = a vale 1/9.

Del año 2021:

Ejercicio 28: Considera las funciones f, g : R → R definidas por f(x) = |x| – 2 y por g(x) = 4 – x^2 .

a) Halla los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones y esboza el recinto que delimitan.

b) Determina el área del recinto anterior.

Ejercicio 29: Considera la función f : R → R definida por f(x) = $4x^3 - x^4$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas.

Ejercicio 30: Considera la función F: [0, +∞) → R definida por F(x) = $\int_0^x (2t + \sqrt{t})\, dt$. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa x = 1.

Del año 2022

Ejercicio 31: Considera la función f: R → R definida por f(x) = x^3 – x. Calcula el área total de los recintos limitados por la gráfica de la función f y la recta normal a dicha gráfica en el punto de abscisa x = 0.

Ejercicio 32: Considera las funciones f, g: R → R definidas por f(x) = x^2 y g(x) = a|x|, con a > 0. Determina el valor de a para que el área total de los recintos limitados por las gráficas de ambas funciones sea de 9 unidades cuadradas

Ejercicio 33: Considera las funciones f, g: R → R definidas por f(x) = x^3 + 2 y g(x) = $-x^2$ + 2 x + 2.

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza sus gráficas.

b) Determina el área del recinto limitado por las gráficas de f y g en el primer cuadrante.

Ejercicio 34: Considera las funciones f, g : R → R definidas por f(x) = 1 – x^2 y g(x) = 2 x^2.

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza el recinto que delimitan.

b) Determina el área del recinto anterior.