REPASO DE LA UNIDAD 3: APLICACIONES DE LAS DERIVADAS.

Ejercicio 1: Calcula a, b, c y d sabiendo que la gráfica de la función f: IR → IR definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un punto de inflexión en (0,4) y su recta normal en el punto (1,8) es paralela al eje de ordenadas.

Ejercicio 2: Considera la función definida por f(x) = $= \frac{x^2-10}{x^2+2x-3}$ $para\ x \neq -3\ y\ x \neq 1$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Ejercicio 3: Considera la función f: IR → IR definida por $f(x) = e^x$. Calcula a para que la recta tangente a la gráfica de f en el punto (a, f(a)) pase por el origen de coordenadas.

Ejercicio 4: Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{ln(x+1)} - \frac{a}{x}\right)$ es finito, calcula a y el valor del límite.

Ejercicio 5: Sea f la función definida por f(x) = $\frac{ax^2+b}{a-x}$ $para\ x \neq a$

a) Halla a y b sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (2,3) y tiene una asíntota oblicua cuya pendiente vale -4.
b) Para a = 2 y b = 3, calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.

Ejercicio 6: Considera la función f: IR → IR definida por $f(x) = x^2 + |x - 1|$. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Ejercicio 7: Considera la función f: [0, +∞) → IR definida por $f(x) = x\ e^x$. Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y las rectas x = 2 e y = x.

Ejercicio 8: Calcula a y b sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{a\,(1-cos(x)) + b\,sen(x) - 2(e^x - 1)}{x^2} = 7$

Ejercicio 9: Halla a > 0 y b > 0 sabiendo que la gráfica de la función f: IR → IR dada por f(x) = $\frac{bx^2}{1+ax^4}$ tiene en el punto (1,2) un punto crítico.

Ejercicio 10: Sea f derivable con f: IR → IR con f(x) = a + b sen(x) + c sen(2x), Calcula a, b y c sabiendo que tiene un punto crítico en el punto de abscisa x = π y que la recta normal a f en el punto de abscisa x = 0 es y = - $\frac{1}{2}$ x + 3.

Ejercicio 11: Considera la función f: (0, +∞) → IR definida por $f(x) = (ln(x))^2$ Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, así como sus extremos relativos.

Ejercicio 12: Sea f derivable f: IR → IR dada por f(x) = $\begin{cases} \frac{ax+b}{x-1} & si\ x \leq 0 \\ ln(x+1) & si\ x > 0 \end{cases}$

a) Determina a y b.

b) Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.

Ejercicio 13: Sea la función continua f: IR → IR definida por

f(x) = $\begin{cases} \frac{ln(e^x+x^3)}{x} & si\ x < 0 \\ 4x^2 + a & si\ 0 \leq x < 1 \\ b + sen(\pi x) & si\ 1 \leq x \end{cases}$. Determina a y b.

Ejercicio 14: Sea f: IR → IR la función definida por f(x) = $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Ejercicio 15: Considera las funciones f,g: IR → IR definidas por f(x) = $|x|$ - 2 y por g(x) = 4 - x^2 . Halla los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones y esboza el recinto que delimitan.

Ejercicio 16: Sabemos que la gráfica de f definida por f(x) =$\frac{ax^2 + bx + 2}{x - 1}$ $para\ x \neq 1$ tiene una asíntota que pasa por el punto (1,1) y tiene pendiente 2. Calcula a y b.

Ejercicio 17: Considera la función continua f: IR → IR definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{36\ (sen(x) - ax)}{x^3} & si\ x > 0 \\ (3x - 6)e^x & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

a) Calcula a.
b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = - 1.

Ejercicio 18: Considera la función f: IR → IR definida por f(x) = $4x^3 - x^4$. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. Esboza la gráfica de f.

Ejercicio 19: Considera la función continua por f(x) = $\begin{cases} \frac{1}{x} & si\ x < -1 \\ ax + b & si\ -1 \leq x < 1 \\ \frac{x^2}{x+1} & si\ x \geq 1 \end{cases}$

Calcula a y b. Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.

Ejercicio 20: Sea f la función definida por f(x) = $\begin{cases} 2x + 4 & si\ x < 0 \\ (x - 2)^2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$ .Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función.

Ejercicio 21: Calcula α sabiendo que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\alpha x}{(lnx)^3 + 2x} = 1$

Ejercicio 22: Considera las funciones f,g: IR → IR definidas por $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 2$. Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza sus gráficas.

Ejercicio 23: Sea f la función continua definida por f(x) = $\begin{cases} x^2 + 2 & si\ x \leq 0 \\ \sqrt{ax+b} & si\ 0 < x \leq 2 \\ \frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} & si\ 2 < x \end{cases}$

a) Calcula a y b.
b) Para a = -1 y b = 4, estudia si existe la derivada de f en x = 2. En caso afirmativo, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto.

Ejercicio 24: Considera la función f:IR → IR definida por $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
b) Determina los intervalos de convexidad y de concavidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica.

Ejercicio 25: Sea f la función continua definida por f(x) = $\begin{cases} \frac{x^2+1}{x-1} & si\ x \leq 0 \\ \frac{ax+b}{(x+1)^2} & si\ x > 0 \end{cases}$.

a) Calcula a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en x = 2.
b) Para a = 2 y b = -1 estudia la derivabilidad de f.

Ejercicio 26: Calcula a y b sabiendo que $\lim_{x\to 0} \frac{\alpha\, sen(x) + x\ln(x+1) + b\,x^2}{x^3 + x^2} = 2$

Ejercicio 27: Sea f: $[0, 2\pi]$ → IR la función definida por f(x) = e^x (cos(x) + sen(x))

a) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan)
b) Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = $\frac{3\pi}{2}$.

Ejercicio 28: Considera la función f: IR → IR definida por $f(x) = x^3 - x$. Representa la función y la recta normal a dicha gráfica en el punto de abscisa x = 0.

Ejercicio 29: Sea f la función continua definida por f(x) = $\begin{cases} \mu & si\ x = 0 \\ \frac{e^{\sigma x} - e^x - x}{x^2} & si\ x \neq 0 \end{cases}$

a) Calcula μ y σ.
b) Para $\sigma = 2$, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.

Ejercicio 30: Considera la función f definida por f(x) = $\frac{x^4 - 3x^2 + 2}{(x+2)^3}$ $para\ x \neq 2$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.
b) Calcula la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el pto. de abscisa x = 0.