TEMA 1: MATRICES.

1.1. ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN: TABLAS, GRAFOS Y MATRICES.

Todos hemos jugado al juego de hundir la flota, en el utilizamos una letra y un número, todos hemos utilizado tablas para presentar información (si es posible que ellos pongan un ejemplo, si no ponemos el del libro que señala los precios de un vuelo según distintas ciudades) ¿para qué la utilizaremos? Este año la utilizaremos para resolver sistemas de ecuaciones lineales con cualquier nº de incógnitas y más tarde aplicarlo a la resolución de problemas. Es un concepto nuevo por tanto no depende de tus conocimientos anteriores en mates. Siempre que empezamos una unidad y más en esta ocasión, por tratarse de un concepto totalmente nuevo, debemos dar muchas definiciones que debes aprender cuánto antes.

Se define matriz de **dimensión** mxn en IR, como un conjunto de mxn números reales distribuidos en m filas y n columnas. Cada uno de esos números se llama **elemento de la** matriz. Designaremos a una matriz por $A = (a_{ij})_{mxn} = (a_{ij})$. Los subíndices indican la posición que ocupa dicho número dentro de la matriz, el elemento a_{ij} se encuentra en la fila i y en la columna j, Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$ es una matriz de orden 2 x 3.

¿A quién representa a_{22}? ______ ¿qué lugar ocupa -1?______

Si el número de filas coincide con el número de columnas, y dicho número es n, se dice la matriz es **cuadrada** y de orden n.

Por ejemplo: $A= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & \pi \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

En las matrices cuadradas podemos definir la diagonal principal y la secundaria.
Los elementos 1, 5 y 9 forman la **diagonal principal**, observa que los elementos son a_{ii} (i = i).
Los elementos 3, 5 y 7 forman la **diagonal secundaria**, observa que los elementos a_{ij} donde $i + j = n + 1$

Dos matrices A y B son **iguales** si tienen la misma dimensión y si son iguales todos los elementos que ocupan idéntica posición en ambas matrices. Es decir, A = B si $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i, j.

Ejercicio 1: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

a) Halla el orden da cada matriz.
b) ¿Cuál es el valor de a_{13}, b_{12} y c_{32}?

Ejercicio 2: Determina x, y, z para que A y B sean iguales, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2y & -4x & 0 \\ 3 & -2 & 2z+1 \end{pmatrix}$

Un **grafo** es un conjunto de objetos, llamados **vértices**, conectados entre sí. A las conexiones entre los objetos se denominan **aristas**. 1 significa que hay conexión y 0 de la no existencia de conexión, estas conexiones se representan en una matriz llamada **matriz de adyacencia del grafo**. Por ejemplo: En un archipiélago formado por cuatro islas A, B, C y D se establece un sistema de comunicación por barco. No todas las islas están conectadas entre sí. Dichas conexiones se ven en el siguiente grafo: A → B, A → C, B → D, C → B y D → A, llamadas aristas del grafo. La matriz de adyacencia que le corresponde es

$$\begin{array}{cc} & \text{destino} \\ \text{origen} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

donde $a_{12} = 1$ significa que hay comunicación de A hacia B. Si las aristas del grafo están orientadas se llama **grafo dirigido**.

Ejercicio 3: Escribe la matriz cuadrada A de orden 3 tal que sus elementos verifiquen:

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i = j \\ i+j & \text{si } i < j \end{cases}$$

Ejercicio 4: Escribe la matriz de adyacencia que corresponde al grafo: A<->A, B → A, C → B, D → C, A → D Y A → C.

Ejercicio 5: Escribe una matriz A de orden 3x4 tal que: $a_{ij} = \begin{cases} \frac{i+j}{2} - 1 & \text{si } i > j \\ \sqrt{ij} & \text{si } i = j \\ (-3j)^{i} & \text{si } i < j \end{cases}$

Ejercicio 6: Los pueblos A, B, C, D y E están unidos por carreteras de doble sentido tal y como muestra el grafo de la figura con A ←→B, A ←→E, B ←→E, D ←→B, E ←→C, D ←→C. Escribe la correspondiente matriz de adyacencia.

1.2 TIPOS DE MATRICES

En este apartado nos tenemos que habituar al lenguaje matricial, por ello al lado de cada definición debes poner un ejemplo.

1. **Matriz Fila**. Es una matriz de dimensión 1xn.
2. **Matriz Columna**. Es una matriz de dimensión mx1.
3. **Matriz Cuadrada**. Tiene el mismo número de filas que de columnas. Una matriz de orden nxn se llama matriz cuadrad de orden n. En estas podemos definir **diagonal principal** de una matriz cuadrada que es la formada por los elementos a_{11} , a_{22}, ..., a_{nn}. Llamamos **diagonal secundaria** a la línea determinada por a_{n1}, $a_{n-1\,2}$, ..., a_{1n}.
4. **Matriz triangular**. Es una matriz cuadrada en la que los elementos situados a un mismo lado de la diagonal principal son nulos. Si los ceros están situados por debajo de la diagonal principal se llama **matriz triangular superior** y si están situados por encima de la diagonal principal se llama **matriz triangular inferior**.
5. **Matriz diagonal**. Es una matriz cuadrada que se caracteriza porque todos los elementos que no están en la diagonal principal valen cero.
6. **Matriz escalar**. Es una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal principal iguales. Si los elementos de la diagonal principal de una matriz escalar valen 1 esta se llama **matriz unidad (identidad)**, y se denomina por I o I_n.
7. **Matriz nula**. Es una matriz cuyos elementos son todos nulos.
8. **Matriz opuesta**. Dada la matriz $A = (a_{ij})$ su opuesta es $-A = (-a_{ij})$.
9. **Matriz traspuesta**. Dada una matriz $A = (a_{ij})_{mxn}$, su matriz traspuesta es aquella que se obtiene al intercambiar en la matriz A sus filas por sus columnas y se representa por A^t. De dicha definición tenemos las siguientes propiedades:
   a) Si la dimensión de A es mxn, se tiene que la dimensión de A^t es nxm
   b) El elemento a^t_{ij} será igual al a_{ji} de la matriz A.
   c) Se verifica que $(A^t)^t = A$.
10. **Matriz simétrica**. Es una matriz cuadrada que se caracteriza porque $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i, j. Es decir, la matriz coincide con su traspuesta verificando $A = A^t$.
11. **Matriz antisimétrica**. Es una matriz cuadrada cuya matriz coincide con la opuesta de su traspuesta. Es decir, se caracteriza porque $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i, j. ($i \neq j$) y los elementos de la diagonal principal son todos nulos. También se llaman **hemisimétricas**. Se verifica $A = -A^t$. Por ejemplo $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
12. **Matriz escalonada**. Son aquellas matrices que verifican dos condiciones: las filas con todos los elementos nulos ocupan los últimos lugares y el primer elemento no nulo de cada fila, exceptuando la primera fila, debe quedar más a la derecha que el primer elemento no nulo de la fila anterior. Este concepto nos sirve para el método de Gauss que veremos en

otro apartado, tiene un parecido con la matriz triangular superior pero con la novedad de que no tiene que ser una matriz cuadrada.

Ejercicio 7: Calcula el valor de a, b y c para que las siguientes matrices sean simétricas:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2a-1 & \sqrt{b} \\ a & -3 & -3 \\ 9 & c & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} -2 & a^2+a \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8: Indica si las siguientes matrices son o no escalonadas:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.3. OPERACIONES CON MATRICES DE DIMENSIONES.

Designamos por $M_{mxn}(IR)$ al conjunto de matrices de orden m x n cuyos elementos son números reales. En dicho conjunto podemos definir las siguientes operaciones:

$$A+B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C+D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Suma de matrices:</u> $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (c_{ij})$, $A + B = C$

De manera que cada elemento de la matriz (c_{ij}) se obtiene sumando los elementos que ocupan igual posición en las matrices A y B.

Propiedades:

1º Es una operación interna, al sumar dos matrices **de igual orden**, se obtiene otra con el mismo orden, y no podrán sumarse dos matrices con distinto orden.

2ºAsociativa: (A + B) + C = A + (B + C)

3º Elemento neutro es la matriz nula, O: A + O = O + A = A

4º Elemento opuesto de una matriz A es -A: A + (- A) = O

5º Conmutativa: A + B = B + A.

6ª $(A + B)^t = A^t + B^t$

<u>Producto de un número real por una matriz:</u>

$$3\cdot C = 3\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Para multiplicar un número real por una matriz, observa el siguiente ejemplo:

A diferencia de la operación suma, el producto por un escalar es una operación externa, en el sentido de que no se opera con dos matrices, sino con un número y una matriz. Se verifican las siguientes propiedades:

6ª Distributiva respecto de la suma de matrices: $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
7ª Distributiva respecto de la suma de escalares: $(k+h)\, A = k\,A + h\,A$
8ª Asociativa mixta: $(kh)\, A = k\,[h\,A]$
9ª Elemento unidad: $1 \cdot A = A$
Voluntarios ejercicios resueltos 9 y 10 de la página 15

En los ejercicios 9 y 10, no olvides que algunos de los apartados no necesitas hacerlo si utilizas las propiedades. Por ejemplo: si sabes A + B, para calcular 3A + 3B, utiliza 3A + 3B = 3 (A + B).

Ejercicio 9: Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Calcula: a) $A + B$ b) $A - B$ c) $2A - 2B$ d) $A - I$ e) $3A + 2B - I$.

Ejercicio 10: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calcula: a) $A + B$ b) $B - A$ c) $3A - 2B$ d) $3(A + B) - 5B - I$ d) $2B - 2A$
e) $A^t + B^t$ f) $(A + B)^t$.

Ejercicio 11: Calcula, en cada apartado, el valor de las letras que aparecen para que:

a) A y B sean opuestas, siendo $A = \begin{pmatrix} x+y & 3y+x \\ 2x+y & 13 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3x+6 & -4y-1 \\ -14 & -x^2+3y \end{pmatrix}$

b) $A^t = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} a^2 & 2b+c \\ b+2c & 2a-5 \\ b^2+c^2 & 41 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -5a & 4 & 16 \\ 8 & 3a & a^2+b^2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 12: Obtener las matrices A y B que verifiquen el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2A + B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A - 3B &= \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

Ejercicio 13: Calcula las matrices A y B sabiendo que

$$\left.\begin{array}{l} A+B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ \\ A-B=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Otra operación de las matrices es: <u>Producto de matrices</u>:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Si quieres puedes ver el siguiente vídeo https://www.youtube.com/watch?v=4HgEfOukm78&list=PLiWRH3aE37VI5V5Dle4i9vN1FVU9kFiL4

Dadas las matrices A y B, se define **matriz producto** C como aquella cuyo elemento c_{ij} resulta de sumar los productos elemento a elemento, de la fila i de la matriz A por los de la columna j de la matriz B. Si consideramos un conjunto de matrices cuadradas Mnxn(IR) (al multiplicar una matriz de orden n por otra de orden n el resultado es una matriz de orden n) Tenemos las siguientes propiedades:

a) Asociativa: $(A \cdot B) \cdot C = A\,(B \cdot C)$
b) El elemento Unidad del producto de matrices de orden n es la matriz identidad I_n, se verifica: $A \times I = I \times A = A$
c) El elemento simétrico de A es una matriz A^{-1}, llamada **matriz inversa**, que verifica que: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

La posibilidad de que exista elemento simétrico se estudiará en un apartado posterior. A las matrices que tienen inversa se les llama **matrices invertibles** o **regulares** y aquellas que no la tienen se llaman **matrices singulares**.

d) Conmutativa. <u>En general</u> no se cumple tal propiedad, contraejemplo

Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -20 & -7 \end{pmatrix}$ y $B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$

e) Distributiva de la multiplicación respecto de la suma de matrices:
$A\,(B + C) = A\,B + A\,C$
f) Asociativa respecto de la multiplicación por un número real. $k \cdot [A\,B] = [k\,A]\,B$
g) $(A\,B)^t = B^t\,A^t$, si tiene sentido el producto AB

Ejercicios resueltos página 17, 13, 14, 15 y 16.

Ejercicio 14: Con las matrices del ejercicio 9, calcula:

a) A.B b) B.A c) $(A.B)^t$ d) $(B.A)^t$ e) $A^t.B^t$ f) A^2 g) A^3

Ejercicio 15: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 9 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y

$D = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Calcula A.B, B.A, A.C, C.A, C.B, B.C, A.D, C.D y A^2

Observaciones:

a) A x B = O no implica que A = O o B = O. Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$

b) Tampoco se cumple que $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2\ AB$. *Ya que los productos notables se obtenían por la conmutatividad del producto que ahora no tenemos.* Lo análogo para el cuadrado de la diferencia y para suma por diferencia.

c) No se cumple que si A x B = A x C entonces B = C. Por ejemplo: Comprueba que:

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$, en cambio B y C no son iguales.

Ejercicio 16: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcula $3A - A^2 + 2I$.

Ejercicio 17: Si $A \in Mn\ (IR)$ y verifica que $A^2 = A$, calcula B^2 siendo $B = 2A - I$.

1.4. RANGO DE UNA MATRIZ. CÁLCULO POR EL MÉTODO DE GAUSS.

Observa la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Puedes ver que la fila 2 es proporcional a la 1 → 2ª F = 2 · 1ª F
Pero también que la 3ª columna es suma (combinación) de la primera y de la segunda.
→ 3ª C = 1ª C + 2ª C

Una fila F_1 (o columna) **depende linealmente** de otras filas F_2, F_3, ..., F_n (o columnas) si existen números reales tales que $F_1 = \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + .. + \lambda_n F_n$

Otra forma de decidirlo, las filas de una matriz F_1, F_2, F_3, …, F_n son **linealmente dependientes**, si al menos una de ellas depende linealmente de las restantes. En caso contrario se dice que son **linealmente independientes**.
El **rango** de una matriz A es el máximo número de filas o columnas linealmente independientes que se pueden encontrar en ella.

Ejercicio 18: Escribe tres ejemplos con matrices de distintos orden de forma que tengan:

a) Rango 1 b) rango 2 c) rango 3

No es fácil poner un ejemplo de orden 3, y mucho más complicado el de rango 4, para facilitarnos el trabajo tenemos el método de Gauss. Para calcular el rango de una matriz utilizaremos el **método de Gauss** que indica que el rango de la matriz es igual al número de filas no nulas de la matriz escalonada (ya que estas son linealmente independientes). Para conseguir la matriz escalonada utilizaremos transformaciones elementales de filas o columnas que dejan invariante el rango de una matriz y estas transformaciones son:

1ª) Si se permutan (intercambian) dos filas o dos columnas el rango no varía.
2ª) Si se multiplica o divide un fila o columna de una matriz por un nº real no nulo, el rango no varía.
3ª) Si a una fila o columna se le suma o resta otra paralela, el rango no varía.
4ª) Podemos suprimir las filas o columnas nulas.
5ª) Podemos suprimir las filas o columnas proporcionales.
6ª) Podemos suprimir las filas o columnas que dependan linealmente de otras.
7ª) $rg(A) = rg(A^t)$

Ejercicio resuelto 22 página 19: Calcula el rango de la matriz A por el método de Gauss (Recuerda que el método de Gauss es hacer ceros debajo de la "diagonal principal", primero debajo de a_{11}, después de a_{22}, …):

A es una matriz de orden 4x5, por tanto el orden mayor que puede alcanzar es de 4.

$rgA = rg\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & -3 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ (Cambio columna 1 y 3, para indicarlo escribimos $C_1 \leftrightarrow C_3$) $= rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -4 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ ($F_3 \leftrightarrow F_3 + 2F_1$; $F_4 \leftrightarrow F_4 + 3F_1$)=

$$rg\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 2 & 3\\ 0 & 2 & -4 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 4 & 8\\ 0 & 0 & 2 & 10 & 19\end{pmatrix} = (F_3 \leftrightarrow F_2 + 2F_3) = rg\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 2 & 3\\ 0 & 2 & -4 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 10 & 19\\ 0 & 0 & 2 & 10 & 19\end{pmatrix} \ (F_4 \leftrightarrow F_4 - F_3) =$$

$$rg\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 2 & 3\\ 0 & 2 & -4 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 10 & 19\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 3$$

Ejercicio 19: (ejercicio 23, 24 de la página 19) Calcula el rango de las siguientes matrices (no olvides qué si usas las propiedades, quizás no tengas que hacer la matriz escalonada (Gauss)):

a) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & -6\\ 4 & 6 & -12\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}2 & -3 & 5 & 0\\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1 & 7\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}0 & -1 & 4 & 4\\ 2 & 1 & 2 & -3\\ 2 & -3 & 18 & 13\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}3 & 1 & 3 & 4\\ -1 & -1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 4 & -1 & 5\end{pmatrix}$

1.5. MATRIZ INVERSA. CÁLCULO POR EL MÉTODO DE GAUSS-JORDAN.

Dentro de las matrices cuadradas, al definir el producto de matrices, hablamos de la matriz inversa. La matriz inversa de A es una matriz A^{-1} que verifica que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. La matriz inversa existe si el orden de la matriz coincide con su rango.

La matriz inversa, si existe, verifica las siguientes propiedades:

a) $(A^{-1})^{-1} = A$ b) $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$ c) $(A\,B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Para calcular la matriz inversa, si existe, tenemos dos métodos, planteando una ecuación matricial que deriva en resolución de ecuaciones y el método de Gauss-Jordan.

Ejercicio 20: Calcula, mediante una ecuación matricial, la matriz inversa de A, siendo $A = \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Para calcular la matriz inversa, de matrices de orden 3 utilizamos el **método de Gauss-Jordan** utilizamos las propiedades mostradas en el cálculo de rango, con una gran diferencia, no podemos modificar el orden de las columnas, ni operar con ellas. El primer paso es construir una nueva matriz A y a su derecha la matriz identidad (del mismo orden que la matriz A). Segundo paso realizar las transformaciones adecuadas de forma que obtengas a la izquierda la matriz unidad I, la matriz de la derecha es la matriz inversa.

Ejercicio resuelto:

Calcula mediante el **método de Gauss-Jordan** la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

También puedes ver https://www.youtube.com/watch?v=NKDbbpkPCz4 hace un ejemplo de orden 2 y en este vídeo https://www.youtube.com/watch?v=nHEFxcJ-QPM hay una de orden 2 y otra de orden 3.
Voluntarios, ejercicios 25, 26 y 27 de la página 21.

Ejercicio 21: (28) Aplicando la definición, calcula las matrices inversas de:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 22: (29) Calcula X de forma que AX + B = C, siendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 23: (30) Calcula X de forma que XA – B = 2C, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 24: (31) Comprueba que el rango de $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2 y observa qué ocurre si tratas de calcular su inversa por el método de Gauss-Jordan.

Ejercicio 25: (32) Utiliza el método de Gauss-Jordan, calcula las matrices inversas de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 26: Dada las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación matricial XA = B + P.

Ejercicio 27: Dada las matrices $M=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación matricial MX + N = P.

1.6. APLICACIONES DE LAS MATRICES A LAS CIENCIAS SOCIALES.

¿Qué aportan las matrices y sus operaciones? Vamos a desarrollar varios ejemplos en los que la suma y producto de matrices nos ayudan a resolver problemas reales.

Ejercicio resuelto: **Aplicación al consumo.** La familia F1 consume cada semana 10 barras de pan, 2kg de carne y 8 l de leche, la familia F2 consume 12 barras de pan, 3 kg de carne y 7 l de leche. Por último, la familia F3 consume 15 barras de pan, 4 kg de carne y 10 l de leche.
Los precios, en euros por unidad, de los productos mencionados han variado durante las cuatro primeras semanas del mes de agosto y vienen expresados por la matriz P

$$\begin{array}{r} \\ \text{Pan} \\ \text{Carne} \\ \text{Leche} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}65 & 0{,}7 & 0{,}7 \\ 12 & 12 & 12{,}5 & 13 \\ 1{,}1 & 1{,}15 & 0{,}95 & 1{,}1 \end{pmatrix} \end{array} = P$$

Calcula el consumo de cada familia en cada semana de agosto.

Para ello primero debemos calcular la matriz que representa el consumo de las tres familias. Es la siguiente matriz, nombrada C

$$\begin{array}{r} \\ F1 \\ F2 \\ F3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{pan} & \text{carne} & \text{leche} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 2 & 8 \\ 12 & 3 & 7 \\ 15 & 4 & 10 \end{pmatrix} \end{array} = C$$

La matriz producto CP representa el gasto total de cada una de las familias en cada una de las semanas consideradas:

$$CP = \begin{array}{r} \\ F1 \\ F2 \\ F3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1^a\ \text{semana} & 2^a & 3^a & 4^a \end{array} \\ \begin{pmatrix} 38{,}8 & 39{,}7 & 39{,}6 & 41{,}8 \\ 50{,}9 & 51{,}85 & 52{,}55 & 55{,}1 \\ 68 & 69{,}25 & 70 & 73{,}5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Es decir la familia F2 ha gastado 52,55 € en la tercera semana de agosto.

En el primer apartado vimos como calcular la matriz de adyacencia de un grafo, ¿alguna operación de matrices aporta utilidad a los grafos? El producto de una matriz por si misma nos da el número de caminos diferentes de longitud n para ir de un vértice a otro.

Ejercicio 28: **Caminos de un grafo.** El grafo dado por las aristas D →A, A →C, B→D, D→B, representa las conexiones por ferrocarril de cuatro localidades de una misma zona geográfica. Las potencias n-simas de la matriz de adyacencia nos indica el número de caminos diferentes para llegar de una localidad a otra a través de n caminos. Calcula la matriz de adyacencia y calcula cuántas formas hay de ir a B a A utilizando dos caminos.

Ejercicio 29: **Procesos estocásticos, son aquellas variables que cambian con el paso del tiempo, en nuestro ejemplo el porcentaje de clientes de una compañía varía con el tiempo.** En una zona geográfica la presencia de las compañías que ofrecen el servicio de internet es la reflejada en la tabla:

Compañía	A	B	C
% clientes	60%	30%	10%

La probabilidad de que un cliente que está en la compañía A permanezca en ella el mes siguiente es del 95%, la de que pase a B del 2% y de que pase a C del 3%
La probabilidad de que un cliente que está en la compañía B permanezca en ella el mes siguiente es del 90%, la de que pase a A del 2% y de que pase a C del 8%
La probabilidad de que un cliente que está en la compañía C permanezca en ella el mes siguiente es del 98%, la de que pase a B del 1% y de que pase a A del 1%
Estas probabilidades se suponen fijas, es decir, son siempre las mismas independientemente del mes en el que se encuentre el proceso. A este tipo de procesos estocásticos se les llama **cadena de Markov**
Para representar la evolución de un mes a otro tenemos la **matriz de transición** T

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}02 & 0{,}03 \\ 0{,}02 & 0{,}9 & 0{,}08 \\ 0{,}01 & 0{,}01 & 0{,}98 \end{pmatrix} \end{array}$$

Observa que la suma de los elementos de cada fila siempre da 1.
Las potencias n-simas de la matriz de transición T nos indica las probabilidades de cambiar de una compañía a otra en n meses. Calcula T^2 y la probabilidad de pasar de B a A en dos meses.

Ejercicio 30: Una empresa monta ordenadores de dos tipos, de mesa y portátiles, de tres calidades: alta, media, baja.
En un mes monta 100 ordenadores de cada tipo, de los de mesa: 20 son de calidad alta, 40 de media y 40 de baja, de los portátiles: 30 de alta, 30 de media y 40 de baja.
Para los ordenadores de mesa se invierten cuatro horas de montaje y siete de instalación del software, y para los portátiles, seis y ocho horas, respectivamente.

a) Escribe la matriz A que determina el número de ordenadores montados atendiendo a su calidad (filas) y su tipo (columnas).
b) Escribe la matriz B que determina el número de horas utilizadas de montaje y de software (filas) para cada tipo de ordenador (columna).
c) Calcula e interpreta la matriz AB^t.

Ejercicio 31: Observa el grafo de aristas A→D, A→C, B→A, B→C, B→D, C→B, D→A. Calcula todos los caminos de longitud 3 que se pueden seguir para ir de C a D y todos los caminos de longitud 4 que se pueden seguir para ir de C a A.

1.7 DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

Se define el **determinante** de una matriz cuadrada $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ de orden 2 como el número real que resulta de efectuar $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}\, a_{21}$. Y se denota por $|A|$.

$A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}\, a_{21}$ Observa, (diagonal principal) – (diagonal secundaria)

Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $|A| = -3 -4 =-7$

Si la matriz es de orden 3 se define el **determinante** de la matriz de orden 3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, como el número real $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}\, a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$

Para recordarlo de una forma más cómoda observa que van con signo positivo la diagonal principal y sus paralelas y con signo negativo la diagonal secundaria y sus paralelas, es la llamada **regla de Sarrus**.

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 9$ Si no lo has entendido bien puedes ver https://www.youtube.com/watch?v=x6UifGsfQ1c , en el vídeo podéis ver varios métodos, os aconsejo el tercero regla de Sarrus, pero podéis elegir el que queráis, eso sí os recomiendo que siempre hagáis el mismo. Hay tres ejemplos mostrando las propiedades. También podéis ver https://www.youtube.com/watch?v=v84ZlIcSc5o

Ejercicio 32: Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ j) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ k) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

l) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ m) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 8 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ n) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

Si conoces las propiedades de los determinantes, hay muchos determinantes que puedes hacer de forma inmediata, revisa los apartados del ejercicio 32.

Propiedades de los determinantes:

1º) Si se cambian filas por columnas en una matriz cuadrada, su determinante no varía. Es decir, el determinante de una matriz cuadrada es igual al de su matriz traspuesta. $|A| = |A^t|$

2º) Si cambiamos entre sí dos filas o dos columnas de una matriz cuadrada, el determinante de la nueva matriz es igual al opuesto del determinante de la matriz inicial.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

3º) Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas iguales, su determinante es nulo, es decir, det $(C_1, C_2, C_2) = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

4º) Si todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada valen cero, el determinante vale cero, ya que en los productos parciales hay un elemento de cada fila y columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

5º) Dada una matriz cuadrada si multiplicamos todos los elementos de una fila (ó columna) por un cierto nº real α, entonces el determinante de la nueva matriz es igual al determinante de la matriz inicial multiplicado por dicho nº α.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

6º) Si una fila de un determinante está formada por términos que son suma de dos sumandos, el determinante es igual a la suma de determinantes del siguiente modo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -10 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -14(-4-10)$$

7º) Dada una matriz cuadrada, si a una fila se le suman otras filas multiplicadas por factores cualesquiera, la nueva matriz tiene el mismo determinante que la matriz inicial. (Análogo para columnas). **Debes tener en cuenta** que la fila a la que sumamos la combinación lineal no puede estar multiplicada por ningún número, es decir,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \Rightarrow \text{sumo } F_1 + F_2, \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

8º) Determinante de una matriz triangular. El determinante de una matriz triángular es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

9º) $|A.B| = |A|\,|B|$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -10 \rightarrow$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 4 & 13 & 10 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 40$$

10º) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ **De esta propiedad deducimos que no todas las matrices tienen determinante, las matrices que tienen determinante cero no tienen inversa.**

Ejercicio 33: Hallar los valores de a para los que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa. Calcula su matriz inversa para a = 1.

Ejercicio 34: ¿Para qué valores de a no tiene inversa la matriz A? Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcular la inversa para a = 1.