UNIDAD 4: FUNCIONES. LÍMITES. CONTINUIDAD.

4.1 FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL.

Se define **función real de variable real** a una aplicación que a cada elemento x del subconjunto D de IR le hace corresponder un único número real y llamado **imagen.** A x se le llama variable independiente y a y = f(x) se le llama variable dependiente.

$$f: D \subset IR \longrightarrow IR$$
$$x \longrightarrow f(x)$$

v. indep. v. dependiente, imagen de x mediante f.

La **gráfica** de una función f está formada por los pares de puntos (x , f(x)) con $x \in D(f)$. *Ya sabemos que no podemos dibujar punto a punto, con este tema iniciamos el conocimiento de una herramienta importantísima: la representación gráfica.*

Una función se puede expresar de cuatro formas: mediante una fórmula, con una tabla de valores, mediante un enunciado o por su gráfica.

Ya conocemos las operaciones matemáticas de sumar, multiplicar o dividir, en el siguiente ejercicio lo vamos a aplicar a las funciones. Debes recordar la siguiente notación::

(f+g) (x) = f(x) + g(x) (fg) (x) = f(x) g(x) (f:g) (x) = f(x) : g(x)

Ejercicio 1: Dadas las funciones $f(x) = \frac{1-x}{x}$, $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $h(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}$ y $i(x) = \frac{1}{x}$.

Calcula y observa sus dominios:

a) (f + g)(x) b) (g – h)(x) c) (g : h)(x) d) (g : i)(x)

e) $[f(x)]^2$ f) $\left(\frac{1}{f}\right)(x)$

Ejercicio 2: Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$, $h(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}$ y $i(x) = \frac{1}{x}$.

Calcula y observa sus dominios:

a) (f + g)(x) b) (f·g)(x) c) (f : g)(x) d) (1 : g)(x)

Hay una operación que es exclusiva de las funciones y que es muy importante: la composición de funciones, que consiste en obtener una función a partir de la aplicación de dos o más funciones de forma sucesiva.

Dadas dos funciones f y g definimos la función **f compuesta con g** como la función que asigna a cada x del dominio de f el número g[f(x)]. Dicha función se denota por gof.

$$f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad g: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) \qquad\qquad x \longrightarrow g(x)$$

$$gof : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow gof(x) = g[f(x)].$$

Propiedades de la composición de funciones:

a) Propiedad asociativa: h o (g o f) = (h o g) o f

b) No tiene la propiedad conmutativa: g o f $\neq$ f o g.

Ejercicio 3: Calcula, en los distintos apartados, fog y gof, si tienes dudas mira el siguiente vídeo https://www.youtube.com/watch?v=v8j1qoTvDSg:

a) $f(x) = x^2 - 5x$ y $g(x) = x^2$.

b) $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = \sqrt{2x-1}$. Calcula g(f(4))

c) $f(x) = \frac{2-x}{x}$ y $g(x) = \frac{3}{x}$.

d) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$.

e) $f(x) = x^3 - 6$ y $g(x) = \sqrt[3]{x+6}$.

Ejercicio 4: Representa las siguientes funciones elementales:

a) $y = 5$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = x^2$

d) $y = 2x^2 + 3x - 2$ e) $y = \frac{1}{x}$ f) $y = \frac{1}{x} + 2$

g) $y = \frac{2x+1}{x}$ h) $y = \begin{cases} x & \text{si } x \le 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ i) $y = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

j) $y = \sqrt{x}$ k) $y = e^x$ l) $y = \text{Ln } x$

** Vídeo para representar una parábola https://www.youtube.com/watch?v=J3qQWvxqFI4, para representar el apartado g https://www.youtube.com/watch?v=4PWf27vLNQs, y para representar una función a trozos https://www.youtube.com/watch?v=L9ePjFfbM5w

4.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

Observa la siguiente función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$ en el x = 0. Si calculamos f(0) = 0/0 que no existe, hazlo en tu calculadora, nos mostrará ERROR. Si podemos calcular, usando la calculadora, el valor de f(x) con valores muy cercanos a x = 0. ¿Qué observas? Puedes ver que las imágenes se acercan a 1/6. ¿Cómo podemos calcularlo sin utilizar la calculadora? Es lo que aprenderemos a lo largo de este apartado.

Se dice que un número real L es el **límite de una función en el punto a por la derecha**, si al tomar valores de x cada vez más próximos a "a", con x > a, sus imágenes correspondientes, f(x), están más próximos a L. Y se escribe $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$

Análogamente se dice que un número real L es el **límite de una función en el punto a por la izquierda**, si al tomar valores de x cada vez más próximos a "a", con x < a, sus imágenes correspondientes, f(x), están más próximos a L. Y se denota por $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$

Una función f tiene por **límite L cuando x tiende a "a"** si se verifican las tres condiciones siguientes, existe el límite por la derecha de f en x=a, existe el límite por la izquierda de f en x=a y ambos límites coinciden y valen L. El límite es único y se denota por $\lim\limits_{n\to a} f(x)=L$.

Propiedades de los límites: Sean f y g dos funciones con $\lim\limits_{n\to a} f(x)= l$ y $\lim\limits_{n\to a} g(x)= m$ entonces podemos afirmar que:

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = l + m$
2. $\lim\limits_{x\to a}(kf(x)) = k.l$
3. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x)) = l\ .\ m$
4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$, si $m\neq 0$
5. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$ con $l > 0$
6. $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = l^m$ con $l > 0$

Ejercicio 5: Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}(x^3-x^2+1)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\right)-\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\right)+\lim\limits_{x\to 0}(1)=0^3-0^2+1=1$

b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+1}{3x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 5}\left(x^2+1\right)}{\lim\limits_{x\to 5}3x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 5}\left(x^2\right)+\lim\limits_{x\to 5}(1)}{3\lim\limits_{x\to 5}(x)}=\dfrac{5^3+1}{3\cdot 5}=\dfrac{25+1}{15}=\dfrac{26}{15}$

En los apartados a y b hemos utilizado las propiedades paso a paso, habitualmente calculamos el límite sin más, sustituyendo x por su valor.

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x+1}{x^3-x^2+1}=$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-1}{x}=0$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+5x+4}}{2x-1}=$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{5x+4}{x}\right)^x=$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}=$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=$

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{2-x}=$

j) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}=$

k) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-x}{(x^2-1)^2} =$

l) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2+2x-4}{x^2-2x+1} =$

m) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x^2} =$

n) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x^2-x+1} =$

ñ) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3x^2}\right) =$

o) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{x^2+x-6} =$

p) $\lim\limits_{x\to 3} e^x =$

q) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-4x}{x-2} =$

r) $f(x) = \begin{cases} x^2-2x-3 & \text{si } x<1 \\ x^2 & \text{si } x\geq 1 \end{cases} \quad x\to -1, x\to 0, x\to 2, x\to 1$

s) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x\leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x>0 \end{cases} \quad x\to -1, x\to 0, x\to 2, x\to 1$

t) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} =$

4.3 LÍMITES EN EL INFINITO.

Cuando estamos resolviendo un problema en contexto real, a veces nos preguntamos cómo crecerán las células en el tiempo, cómo evolucionaran los precios de los costes de unos artículos cuando producimos cada vez más,..etc. Para resolver estas incógnitas, necesitamos calcular el límite en el infinito, es decir, x → $\pm\infty$.

Ejercicio 6: Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3}{x+5} =$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} (2-x) =$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2-x) =$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} (5-x)(3+x) =$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} =$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{2}{3x+1}+x\right) =$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(7-\dfrac{3}{x}\right) =$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-x\right) =$

La **regla de los grados** nos ayuda a resolver límites de la forma $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ siendo P y Q dos polinomios. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}0 \text{ si grado}P<\text{grado}Q\\ \pm\infty \text{ si grado}P>\text{grado}Q\\ \frac{a}{b} \text{ si grado}P=\text{grado}Q\end{cases}$ siendo a y b los coeficientes principales de P y Q, respectivamente.

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{x+5}=$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-x^2}{x+5}=$

k) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^2+5}=$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-x^2}{3x-1}=$

m) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{3-x}=$

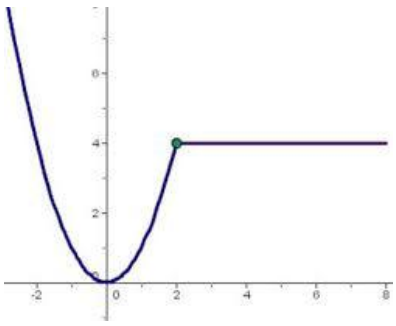
n) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+x^2}{x+5x^3}=$

ñ) $f(x)=\begin{cases}x+3 & \text{si } x\le 0\\ \frac{1}{x} & \text{si } x>0\end{cases}$ $x\to-\infty, x\to+\infty$

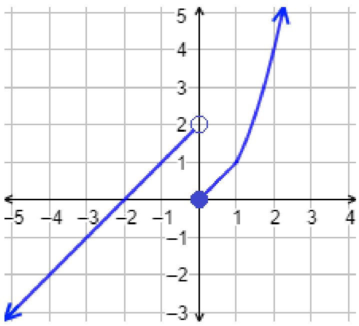
o) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)=$

4.4 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO Y EN UN INTERVALO.

La continuidad de una función es la suavidad de su gráfica, poder dibujarla de un sólo trazo.



Función continua



Función discontinua en x = 0.

Una función f es **continua en un punto x=a** si existe el límite de f cuando x tiende a x = a, existe la imagen de a mediante f y ambos coinciden.

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

Las funciones definidas por expresiones analíticas elementales son continuas en su dominio ya que si f y g son continuas en x = a, entonces podemos afirmar que f+g, f-g, kf, f.g y f/g (con g(a) distinto de 0) son continuas en x = a.

Una función es continua en el intervalo abierto (a, b) si es continua en todos los puntos del intervalo. Una función es continua en el intervalo cerrado [a, b] si es continua en todos los puntos del intervalo abierto, es continua por la derecha en x = a y por la izquierda en x = b.

Si una función no es continua en x=a se dice que es **discontinua**. Podemos hablar de tres tipos de discontinuidades:

1. La función f tiene una discontinuidad de **tipo evitable** en x=a si existe el límite de f cuando x tiende a x = a, existe la imagen de a mediante f pero no coinciden o no existe la imagen de a.
2. La función f tiene una discontinuidad **inevitable de salto finito** en x = a si existe el límite de f cuando x tiende a x=a por la derecha y por la izquierda pero no coinciden.
3. La función f tiene una discontinuidad **inevitable de salto infinito** en x = a si el límite de f cuando x tiende a x = a por la derecha y/o por la izquierda vale infinito.

Aquellos ejercicios que nos piden que estudiemos la continuidad de una función, nos piden que demos tres pasos: 1) Estudiar el dominio. 2) Estudiar la continuidad en los puntos problemáticos (los que no están en el dominio o los extremos de los intervalos de definición). 3) Decir en qué conjunto la función es continua, como consecuencia de su construcción.

Ejercicio 7: Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

c) $f(x) = e^{x+5}$

d) $f(x) = \text{Ln } x$

e) $f(x) = \sqrt{2x+6}$

f) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x \le 0 \\ 2^{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

g) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

h) $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x < 2 \\ x-2 & \text{si } 2 \le x \le 4 \\ 5 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

j) $f(x) = |\text{Ln }(x+3)|$

Ejercicio 8: Encuentra los valores de k para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x-k & \text{si } x \le 3 \\ x^2+k & \text{si } x > 3 \end{cases}$ sea continua en todo $\Re$.

Ejercicio 9: Calcula para qué valores de a y b es continua la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - b & \text{si } x \le 0 \\ ax + b & \text{si } 0 < x \le 2 \\ x^2 + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

4.5 ASÍNTOTAS.

Si en un punto x = a la función f tiene uno o ambos límites laterales infinito se dice que f tiene una **asíntota vertical** en x = a, es decir, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ entonces x = a es una asíntota vertical. Por tanto, tendremos asíntotas verticales en los puntos que no están en el dominio, dónde se divide por 0 ó logaritmo de cero.

Si el límite cuando x tiende a $\pm\infty$ de f es k, con k un número real, se dice que f tiene una **asíntota horizontal** en y = k, es decir, si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = k$ entonces y = k es una asíntota horizontal. Si hay asíntota horizontal, no puede existir asíntota oblicua.

Si no hay asíntota horizontal, tendremos $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Si $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$, se dice que la recta y = m x + n es una **asíntota oblicua** de f. Para calcular m y n tendremos en cuenta que:

1) Primero calculamos $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m$, $m \in \Re$. Si m = 0 ó ∞ no hay asíntota oblicua.

2) Una vez calculado m, lo utilizamos para calcular $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - mx) = n$, $n \in \Re$. En este caso si podemos tener n = 0.

Ejercicio 10: Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x > -1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \le -1 \end{cases}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

f) $f(x) = \dfrac{x - 3}{5 + 2x}$

Ejercicio 11: Dada la función f(x) = $\dfrac{2x + 3}{ax + b}$, calcula a y b sabiendo que tiene una asíntota horizontal en y = 1 y una asíntota vertical en x = - 2.

Ejercicio 12: Calcula el dominio, continuidad, puntos de corte y asíntotas de las siguientes funciones:

a) f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-3} & \text{si } x > 0 \\ x^2+1 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$ b) g(x) = $\begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \le 3 \\ \dfrac{2x}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$ c) h(x) = $\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

Ejercicio 13: Expresa como una función definida a trozos: f(x) = $2x + |x-1|$

Ejercicio 14: Las funciones de oferta y demanda en función del precio de un producto son, respectivamente: O(p) = 2p – 10 D(p) = $\dfrac{2800}{p}$.

a) Encuentra el punto de equilibrio y da el precio y el número de unidades correspondientes.
b) Dibuja las gráficas de las funciones de oferta y demanda sobre los mismos ejes de coordenadas.
c) ¿Dónde corta la gráfica de la oferta el eje de abscisa? Explica qué significado económico tienes ese punto.

Ejercicio 15: Un modelo logístico predijo que la población mundial (en miles de millones) t años después de 1960 se comportaría según la función P(t) = $\dfrac{5{,}4}{1+1{,}4e^{at}}$.

a) Halla el valor de a sabiendo que en el año 1980 la población era de 4.385.190.000 habitantes.
b) ¿Cuál hubiera debido ser, según este modelo, la población a finales de 2015?

Teorema de Weierestrass o Teorema del máximo y del mínimo:

Si f es una función continua en el intervalo cerrado [a, b], entonces f alcanza el máximo y el mínimo en dicho intervalo.

Ejercicio 16: En un modelo de coche, el consumo de gasolina, en litros por cada 100 km recorridos a una velocidad constante de x km/h, para velocidades comprendidas entre 20 y 160 km/h, viene dada por la función: C(x) = 8 – 0,045x + 0,00025x^2.

a) ¿Cuántos litros cada 100 km consume el coche si viaja a 120 km/h?
b) ¿A qué velocidad consume menos? ¿Cuánto consume?
c) ¿A qué velocidad se ha de conducir para consumir 10 l cada 100 km?

Ejercicio 17: El alquiler mensual de un local dedicado a la fabricación de paneles solares por encargo asciende a 3000 €. El precio de venta de un panel viene dado por la función V(x) = $\dfrac{700}{x+1}$ donde x representa el número total de paneles fabricados.

a) Encuentra la función que expresa los beneficios en relación al número de paneles vendidos.
b) Si el número de paneles vendidos aumenta considerablemente, ¿también lo harán los beneficios?, ¿o estos están limitados de alguna manera?