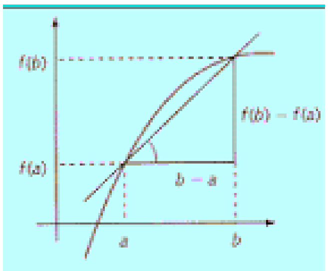
TEMA 5: DERIVADAS

5.1 CONCEPTO DE DERIVADA. FUNCIÓN DERIVADA.

Este concepto matemático nos permite saber cuándo una función es creciente o decreciente, cuándo hay un máximo y/o mínimo y más características de una función, de una gráfica. En la próxima unidad nos ayudará a resolver problemas de optimización, como la las dimensiones de la lata de Coca-Cola. En esta unidad nos centraremos en el concepto de derivada, el cálculo de la recta tangente y conocer las fórmulas de las derivadas.

Se llama **tasa de variación media** (T.V.M.) de una función $y = f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ al cociente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Y se denota por T.V.M. $[a,b]$.



$$\text{T.V.M. } [a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

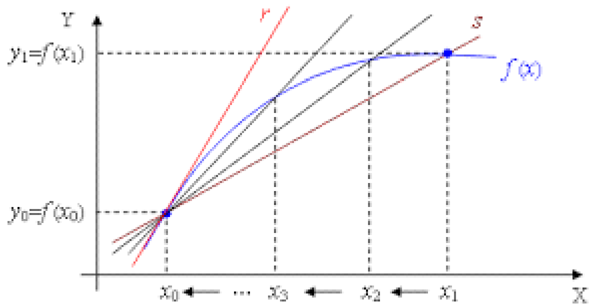
* Si la gráfica fuera de un movimiento la TVM sería la velocidad media en el intervalo correspondiente.

Si tomamos intervalos de longitud cada vez más menor, obtendremos la información que queremos, la variación en el punto de abscisa $x = a$. Llamamos **tasa de variación instantánea** de una función $y=f(x)$ en un punto $x=a$ al siguiente límite:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

A este límite se le llama **derivada** de f en x = a y se denota por $f'(a)$. Si dicho límite existe se dice que f es **derivable** en x = a. Es decir, $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Interpretación geométrica:



Las secantes que pasan por $(x_0,f(x_0))$ y $(x_i, f(x_i))$ se acercan a la recta tangente a f en $x = x_0$ cuando $x_i \to x_0$.
Por tanto la pendiente de la recta tangente es el límite de las pendientes de las rectas secantes. Es decir, **la pendiente de la recta tangente a f en x=a es la derivada de f en x=a**.
Podemos calcular la ecuación una recta si conocemos un punto de ella y su tangente, la recta tangente a f en x = a pasa por el punto (a, f(a)) y su pendiente f´(a), por tanto, su ecuación es de la forma: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Ejercicio 1: Dada la función $f(x) = x^2 + 1$.

a) Calcula, por definición, la derivada de f en x = 2.
b) Calcula la ecuación de la recta tangente a f en x = 2.
c) Representa la función y la recta tangente.

Resolución:

a)

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2+1-(5)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h} = 4$$

$$f'(2) = 4$$

b) Recta tangente a f en x = 2 $\to$ $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$ $\to$ $y = 4(x - 2) + 5$ $\to$ $y = 4x - 8 + 5$ $\to$ $y = 4x - 3$
c) Gráfica de $f(x) = x^2 + 1$ y de $y = 4x - 3$.

Ejercicio 2: Dada la función $f(x) = x^2 - 1$, calcula:

a) Por definición la derivada de f en x = 0.
b) Su recta tangente en x = 0.
c) La gráfica de f y de la recta tangente.
d) ¿Es (0, -1) un punto especial de f?

Ejercicio 3: Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$, calcula:

a) Por definición la derivada de f en x = 1.
b) Su recta tangente en x = 1.
c) La gráfica de f y de la recta tangente.

Queremos calcular la derivada de una función, no sólo en un punto concreto, sino en cualquier punto de su dominio. Para ello se define la **función derivada** de una función f como una función que asocia a cada "a" su derivada f´(a), se denota por f´(x). **El dominio de f´está contenido en el dominio de f, es más está contenido en la continuidad de la función**.

Para calcular la derivada de una función podemos usar la definición de derivada, pero normalmente no es nada fácil. Por ello nos aprenderemos las reglas de derivación. No olvides que estas fórmulas se han hecho partiendo de la definición de derivada, es decir, haciendo el límite.

5.2 REGLAS DE DERIVACIÓN.

REGLAS DE DERIVACIÓN			
$y = k$	$y' = 0$		
$y = x$	$y' = 1$		
$y = f(x) + g(x)$	$y' = f'(x) + g'(x)$		
$y = k \,.\, f(x)$	$y' = k \,.\, f'(x)$		
$y = f(x) \,.\, g(x)$	$y' = f'(x).g(x) + f(x).\, g'(x)$		
$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$		
$y = (f\circ g)(x) = f(g(x))$	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	Regla de la cadena	
$y = x^n$	$y' = n\, x^{n-1}$	$y = f(x)^n$	$y' = n\, f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = a^x$	$y = a^x \,.\, \text{Ln}a$	$y = a^{f(x)}$	$y = a^{f(x)}\, f'(x) \cdot \text{Ln}a$
$y = e^x$	$y = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y = e^{f(x)}\, f'(x)$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x}\log_a e$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}\log_a e$
$y = \text{Ln}x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \text{Ln}\, f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Te dejo algunos vídeos: Ejercicios de Derivadas #1 - Hallar derivadas - YouTube, Tabla de Derivadas: Operaciones #5 - YouTube, Tabla de Derivadas: Logarítmicas #3 - YouTube

Ejercicio 4: Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

1	$f(x) = 2$		2	$f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$	
3	$f(x) = x$		4	$f(x) = x + 1$	
5	$f(x) = 4x$		6	$f(x) = 4x + 5$	
7	$f(x) = x^2$		8	$f(x) = x^3$	
9	$f(x) = x^5$		10	$f(x) = 3x^7$	
11	$f(x) = 5x^6$		12	$f(x) = 2x^2 - 3x$	
13	$f(x) = 2x^2 + 2x + 1$		14	$f(x) = 4x^3 + x^2 - 3$	

15	f(x) = $\sqrt{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2$		16	f(x) = $(x + 1)^2$	
17	f(x)= $(x + 1)^3$		18	f(x) = $(x^2 + 1)^5$	
19	f(x) = $\frac{1}{x}$		20	f(x) = $\frac{1}{x^2}$	
21	f(x) = $\frac{1}{x^4}$		22	f(x) = $\frac{2}{x}$	
23	f(x) = $\frac{x}{x+3}$		24	f(x) = $\frac{x^2}{x-3}$	
25	f(x) = $\frac{3x}{x^2-1}$		26	f(x) = $\frac{3x-5}{(x-1)^2}$	
27	f(x) = $\frac{x^2+2}{x^2}$		28	f(x) = $\sqrt{x}$	
29	f(x) = $\sqrt{2x}$		30	f(x) = $\sqrt{3x^3}$	
31	f(x) = $2\sqrt{x^2-1}$		32	f(x) = $\sqrt{x+5}$	
33	f(x) = $x\sqrt{x}$		34	f(x) = $\frac{1-x}{2x}$	
35	f(x) = e^x		36	f(x) = 2^x	
37	f(x) = 5^x		38	f(x) = e^{x+2}	
39	f(x) = e^{x^2}		40	f(x) = e^{2x^3+5}	
41	f(x) = $\log_2 x$		42	f(x) = $\log_3 x$	
43	f(x) = Ln (x + 5)		44	f(x) = Ln $(x^2+ 1)$	
45	f(x) = Ln $\sqrt{x}$		46	f(x) = x . Ln x	
47	f(x) = $(x^2+1) . e^x$		48	f(x) = $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$	
49	f(x) = $(x^2+1)^2 \cdot e^{2x-1}$		50	f(x) = $\frac{e^{3x}}{x^4+1}$	
51	f(x) = $e^{5x} \cdot (x^2-5)^3$		52	f(x) = $\frac{(x^3+1)^2}{\ln(x^2+2)}$	
53	f(x) = $\frac{3}{x}$		54	f(x) = $\frac{2-x}{x^2}$	
55	f(x) = e^{x^2+1}		56	f(x) = $e^x (x^2 + 1)^2$	
57	f(x) = $\frac{3Lnx}{x}$		58	f(x) = $\sqrt{\frac{3}{x}}$	
59	f(x) = $\sqrt{x+1}$		60	f(x) = $\sqrt{\frac{3+x}{x}}$	

5.3 DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN.

Debemos tener en cuenta dos observaciones muy importantes:
Observación 1: Si f es derivable en x = a entonces f es continua en x = a.
Observación 2: Si f no es continua en x = a entonces f no es derivable en x = a.

En consecuencia la derivabilidad de una función está dentro de la continuidad de esta, no olvides que la continuidad está dentro del dominio. Para estudiar la derivabilidad de una función debemos seguir los siguientes pasos: 1) Dominio de f. 2) Estudio de los puntos conflictivos (no olvides la "frontera" si es una función a trozos). 3) Continuidad en general (decir donde es continua). 4) Derivar f. 5) Estudiar la derivabilidad en los puntos conflictivos (pero recuerda puntos que estén en la continuidad, si no es continua, no puede ser derivable). 6) Indicar donde es derivable f, derivabilidad en general. A veces podemos saltarnos algunos pasos.

Ejercicio 5: Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) f(x) = $\frac{x}{x^2-4}$

b) f(x) = $\begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2^{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) f(x) = $\begin{cases} 2-x & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

d) f(x) = $|x|$

e) f(x) = $|x - 1| + x$

f) f(x) = $\begin{cases} x^2+4x+1 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Ejercicio 6: Sea la función f(x) = $\begin{cases} 2x^2-3x+a & si\ x \leq 0 \\ x^2+bx+1 & si\ x > 0 \end{cases}$. Halla los valores de a y b para que sea continua y derivable en todo su dominio.

Ejercicio 7: Sea la función f(x) = $\begin{cases} -x^2+ax-7 & si\ x < 1 \\ 4x-b & si\ x \geq 1 \end{cases}$. Halla los valores de a y b para que f sea derivable en x = 1.

En cursos anteriores trabajamos con la recta, un elemento muy importante de una recta es la **pendiente**, nos informa de la mayor o menor inclinación de la recta (a mayor número mayor inclinación, si es positiva crece, si es negativa decrece). En la recta y = mx + n, m es la pendiente (es decir, el coeficiente de la x es la pendiente). Dos observaciones a tener en cuenta:

1) Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente.
2) Las rectas horizontales tienen pendiente 0.

Ejercicio 8: Halla los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx$ en $x = 1$ sea paralela a la recta $y = 4x$ y f pase por el punto (1, -2).

Ejercicio 9: Halla los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 - b$ en el punto $x = 1$ sea la recta $y = 3x + 2$.

Ejercicio 10: Se considera la función $f(x) = \frac{x^2}{a-bx}$, siendo a y b parámetros reales. Determina los valores de los parámetros para los que $f(2) = -4$ y la recta tangente a la gráfica de f(x) en $x = 6$ sea horizontal.

Ejercicio 11: La evolución de la fiebre de un enfermo en función del tiempo viene dado por la función $f(t) = -t^2 + 4t + 38$, donde t viene dado en horas y f(t) la temperatura en grados.

a) ¿Qué temperatura tiene a las cero horas, a la hora y a las dos horas?
b) ¿Cuándo alcanza la temperatura máxima?

Ejercicio 12: En una fábrica, la producción de unidades de un determinado artículo a lo largo del día viene dada por la función $u(t) = 20t\,(48 - t)$, donde t representa el tiempo en horas.

a) Calcula el número de unidades al iniciar el día y al terminar el día (suponemos que la fábrica trabaja las 24 horas)
b) Calcula la velocidad media de fabricación en un día.
c) Calcula la hora de mayor fabricación. ¿Cuántas unidades fabrica?
d) Calcula la velocidad instantánea de fabricación a las 10 de la mañana.