TEMA 7: INTEGRALES. LA INTEGRAL DEFINIDA.

7.1 Primitivas: propiedades. Integral indefinida.
7.2 Cálculo de integrales inmediatas.
7.3 Integral definida. Cálculo de áreas bajo una curva.

7.1 PRIMITIVAS: PROPIEDADES. INTEGRAL INDEFINIDA.

Dada una función f definida en [a, b], se llama **primitiva** (antiderivada) de f en [a, b] a toda función F definida en [a, b] tal que $F'(x) = f(x)\ \ \forall\ x \in [a, b]$. Es decir F primitiva de f $\Leftrightarrow$ $F' = f$

Si F(x) es una primitiva de f(x) en [a, b] y *C* una constante, entonces F(x) + *C* es una primitiva de f(x) en [a, b]. Como consecuencia, f tiene infinitas primitivas, al conjunto de todas las primitivas de f(x) se le llama **integral indefinida** de f y se denota por $\int f(x)dx$.

Propiedades:

1) $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

Observación: De la definición de integral indefinida se obtiene $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

Para calcular la integral de una función tenemos dos formas distintas:

a) Mediante nuevas fórmulas que aprender.
b) Utilizando las fórmulas de las derivadas y ajustando su resultado, repasa bien las fórmulas de derivación.

7.2 CÁLCULO DE INTEGRALES INMEDIATAS.

Para calcular integrales (primitivas) debemos tener en cuenta las FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN

1	$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \ \ (r \neq -1)$	2	$\int \frac{1}{x} dx = Ln\lvert x\rvert + C$
3	$\int e^x dx = e^x + C$	4	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

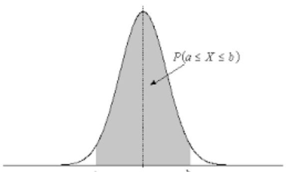
*** Debes adaptar estas fórmulas con la regla de la cadena.*

Ejercicio 1: Resuelve las siguientes integrales inmediatas:

1) $\int 2x dx$	2) $\int 3x^2 dx$	3) $\int 4x^3 dx$
4) $\int 10x^4 dx$	5) $\int 4x dx$	6) $\int 18x^8 dx$
7) $\int 2x^4 dx$	8) $\int x^5 dx$	9) $\int 3x^5 dx$
10) $\int 2dx$	11) $\int (x^2 - 3x + 5)dx$	12) $\int (-x^3 + 3x - 1)dx$
13) $\int \left(\frac{2}{3}x^4 + x^2\right)dx$	14) $\int (-x^5 - 1)^2 dx$	15) $\int (-2x + x^4)dx$
16) $\int (x-3)^5 dx$	17) $\int (x+2)^3 dx$	18) $\int (3x-1)^2 dx$
19) $\int \frac{1}{x^2} dx$	20) $\int \frac{3}{x^3} dx$	21) $\int \frac{1}{(x-3)^2} dx$
22) $\int \frac{1}{x} dx$	23) $\int \frac{3}{x-2} dx$	24) $\int \frac{1}{2x+1} dx$
25) $\int e^{2x+1} dx$	26) $\int x^2 e^{x^3} dx$	27) $\int 2^x dx$
28) $\int \frac{5}{x-2} dx$	29) $\int \frac{7}{(x-2)^2} dx =$	30) $\int \frac{3}{(2x-1)^3} dx$

7.3 INTEGRAL DEFINIDA. CÁLCULO DEL ÁREA BAJO UNA CURVA.

Sabemos calcular el área de un rectángulo o un triángulo, pero:

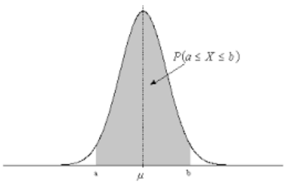


¿Qué ocurre si queremos calcular el área gris? Si f es continua en el intervalo [a, b] con $f(x) \geq 0$, el **área de la región limitada** por el eje de abscisa, la gráfica de f y las rectas verticales x = a y x = b, es F(b) – F(a) siendo F una primitiva de f

Es decir, la **Regla de Barrow** dice: Si f es continua en [a, b] y F una primitiva de f, entonces $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

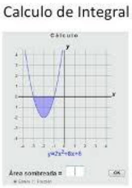
Antes de calcular el área determinada por una función f o por dos funciones f y g, el eje de abscisa, y las rectas x = a y x = b, necesitamos conocer el recinto que delimita. Para ello debemos esbozar la gráfica, observa los siguientes casos:

<u>1er Caso</u>: Si $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$ y R la región plana limitada por la gráfica y=f(x), y las rectas x=a, x=b, y=0.



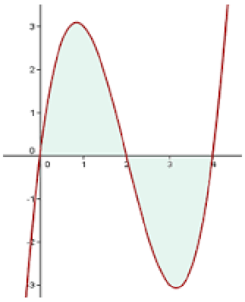
$$A(R) = \int_a^b f(x)dx$$

<u>2º Caso</u>: Si $f(x) \leq 0 \ \forall x \in [a, b]$ y R la región plana limitada por la gráfica $y = f(x)$, y las rectas $x= a$, $x = b$, $y = 0$.



$$A(R) = -\int_a^b f(x)dx$$

<u>3erCaso</u>: Si $f(x)$ toma valores positivos y negativos en $[a, b]$ y R la región plana limitada por la gráfica $y=f(x)$, y las rectas $x=a$, $x=b$, $y=0$. Nota: Hay que calcular los puntos de corte.



$$A(R) = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$

Ejercicio 2: Calcula el área de la región limitada por la gráfica de $y = \dfrac{1}{x^2}$, el eje X y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Ejercicio 3: Calcula el área de la región limitada por el eje X y la curva de $y = x^2 - 2x - 3$.

Ejercicio 4: Calcular el área comprendida entre la curva $y = 4 - x^2$, el eje de abscisa y las rectas $x = -3$ y $x = 1$.

Ejercicio 5: Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)=-x^3+5x^2 -4x$, el eje de abscisa y las rectas verticales $x = 2$ y $x = 3$.

Ejercicio 6: Determina el área de la región finita limitada por el eje horizontal y la gráfica de $y = x^2 - 2x - 3$.

Ejercicio 7: Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2+6x-8 & \text{si } 2 < x < 4 \\ \dfrac{x-3}{x} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad y derivabilidad de f en su dominio.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.
c) Calcule $\int_2^3 f(x)dx$.