TEMA 8: CÁLCULO DE PROBABILIDADES.

8.1 MÉTODOS DE RECUENTO.

Para nuestro apartado de cálculo de probabilidades es necesario "contar" veamos varios ejemplos con el método más adecuado para contar:

Ejemplo 1: En un supermercado hay tres tipos de chocolate y cada uno de ellos se presenta en tres tamaños posible, ¿cuántas posibles opciones tengo de elegir?

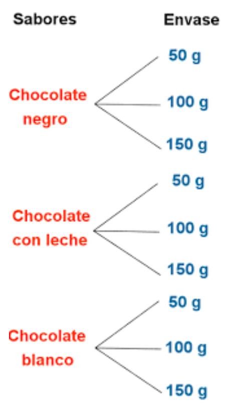

Diagrama de árbol

Tiene 3 · 3 = 9 elecciones posibles. **Regla de la multiplicación**.

Ejemplo 2: En un centro educativo, de 30 profesores, se quiere formar un equipo directivo formado por un director, un jefe de estudios, un secretario y un vicedirector. En este texto hay dos normas que debemos cumplir implícitas en el texto, una de ellas es que una misma persona no puede ser director y jefe de estudios, la otra es que no es lo mismo ser director que secretario. Para "contar" en estas situaciones utilizaremos las **variaciones sin repetición**, que utilizan la siguiente fórmula:

$V_{n,k} = n\,(n - 1)\,(n - 2)\,..\,(n - k + 1) = \dfrac{n!}{(n-k)!} \rightarrow V_{30,4} = \dfrac{30!}{26!} = \dfrac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot\ldots}{26\cdot 25\cdot\ldots} = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 657.720$ equipos directivos distintos se pueden organizar con 30 profesores para cuatro cargos distintos.

Este tipo de recuento lo encuentras en extracción sin reemplazamiento de bolas numeradas, formar "palabras" con varias letras (que no se reemplazan ni repiten).

Ejemplo 3: Si lanzamos una moneda 7 veces ¿Cuántos resultados posibles podemos obtener? Al poner un ejemplo de resultado CCXCCXC vemos que están ordenados los resultados (importa el orden = variaciones) pero en este caso si se repite (CC..) Para "contar" en estas situaciones utilizaremos las **variaciones con repetición**, que utilizan la siguiente fórmula: $VR_{n,k} = n^k$, en nuestro ejemplo sería: $VR_{2,7} = 2^7 = 128$ resultados posibles podemos tener. Incluso lo podemos hacer con diagrama de árbol.

Ejemplo 4: Una madre decide llamar a cenar a 4 de sus 7 hijos ¿De cuántas maneras diferentes puede llamarlos? Observa que no importa el orden y no podemos repetir. Con estas características contamos utilizando los números combinatorios. Se define el **número combinatorio** y se denota por $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1).....(m-n+1)}{n(n-1)...3.2.1}$, para calcularlo puedes usar el **triángulo de Tartaglia**. En nuestro ejemplo sería $C_{7,4} = \binom{7}{4} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 35$ formas distintas de llamarlos.

Otros ejemplos: Seleccionar un equipo de 5 miembros de un grupo de 9 personas, extraer sin reemplazamiento dos cartas de una baraja, elegir 6 vestidos del armario que contiene 10, contar cuántos combinados distintos se pueden preparar utilizando cada vez cuatro de doce bebidas.

8.2 EXPERIMENTOS ALEATORIOS. SUCESOS.

Si al repetir un experimento en las mismas condiciones conduce siempre al mismo resultado, **experimento determinista**. Ejemplo, velocidad de un objeto al caer desde una altura de 2 m. Pero si los resultados no se pueden predecir, se llaman **experimentos aleatorios**.

Es decir, las características de un experimento aleatorio son:

a) Se conocen todos sus posibles resultados.
b) No se puede predecir qué resultado se obtendrá.
c) Si se repite el experimento en condiciones similares, los resultados pueden ser distintos.

Ejemplos: lanzar un dado, sacar una carta de la baraja,... Para estudiar un experimento aleatorio necesitamos definir distintos conceptos, estas definiciones irán acompañadas de ejemplos asociados al experimento "Lanzar un dado":

1) **Espacio muestral** es el conjunto formado por los resultados posibles del experimento, por ejemplo E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
Para construir el espacio muestral es conveniente realizar un diagrama de árbol:

2) **Suceso** es un subconjunto del espacio muestral, por ejemplos: {sacar un 1 ó 2}, {sacar número par}.

3) **Suceso elemental** es aquel que contiene un único resultado posible, ejemplo {sacar un 4}.

4) **Suceso compuesto** es aquel que contiene más de un resultado posible, ejemplo {sacar un 4, 5 ó 6}.

5) **Suceso imposible** es aquel suceso que nunca ocurre. Se denota por ϕ, ejemplo {sacar un 7}.

6) **Suceso seguro** es aquel que ocurre siempre y coincide con el espacio muestral, ejemplo {sacar un 1, 2, 3, 4, 5 ó 6}, {sacar un número menor que 7}.

7) Dado un suceso A, se llama **suceso contrario** o **complementario de A** al suceso que ocurre cuando no ocurre A. Se denota por $\overline{A}$. Si A = {1, 3} entonces $\overline{A}$ = {2, 4, 5, 6}. También se denota por A^c.

OPERACIONES CON SUCESOS

La unión de dos sucesos A y B es el conjunto de elementos del espacio muestral que pertenece a A, a B o a ambos, se denota por $A \cup B$.

La intersección de dos sucesos A y B es el conjunto de elementos del espacio muestral que pertenece a A y a B, se denota por $A \cap B$.

De la operación $\cap$, surge la siguiente definición: Dos sucesos son **incompatibles** cuando no pueden ocurrir a la vez, es decir, $A \cap B = \phi$. Por ejemplo A = {ser par} y B = {ser impar} → $A \cap B = \phi$.

Otra operación de sucesos es la **diferencia entre dos sucesos A y B** es el conjunto de elementos del espacio muestral que son de A y no son de B, se denota por A – B, es decir, $A - B = A \cap \overline{B}$.

Ejercicio 1: "Al lanzar un dado". Dados los sucesos compuestos A = {sale un par} y B = {sale un menor que 3}. Calcula:

a) $A\cup B$ b) $A\cap B$ c) $A - B$ d) $A\cap \overline{B}$ e) $B\cap \overline{A}$

Propiedades de las operaciones con sucesos:

Nombre propiedad	Unión	Intersección
Conmutativa	$A\cup B = B\cup A$	$A\cap B = B\cap A$
Asociativa	$A\cup(B\cup C)= (A\cup B)\cup C$	$A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$
Elemento neutro	$A\cup \phi = A$	$A\cap E = A$
Contrario o complementario	$A\cup \overline{A} = E$	$A\cap \overline{A} = \phi$
Distributiva	$A\cup (B\cap C) = (A\cup B)\cap (A\cup C)$	$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup (A\cap C)$
Leyes de Morgan	$\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$ $\overline{\overline{A}} = A$	$\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$

Ejercicio 2: Se lanza una moneda tres veces.

a) Describe el espacio muestral E.
b) Describe los sucesos A = "obtener dos caras", B = "obtener cara en el primer lanzamiento" y C = "obtener al menos una cruz"
c) Escribe los sucesos: $\overline{A}$, $B\cap C$, $A\cup B$, $C\cap \overline{A}$, $(B\cup C)\cap A$ y $\overline{A\cap B} - C$.

8.3 PROBABILIDAD.

Se llama **frecuencia absoluta** del suceso A, f(A), al número de veces que ocurre A. Se llama **frecuencia relativa** del suceso A al cociente entre el número de veces que ocurre A y el número total de repeticiones del experimento →

$$h(A) = \frac{f(A)}{n} = \frac{\text{n veces que ocurre } A}{\text{n de observaciones realizadas}}.$$

Se llama **probabilidad de un suceso A** al límite de h(A) cuando el número de observaciones tiende a infinito, $P(A)=\lim\limits_{n\to+\infty} h(A)$. **Ley de los grandes números.**

Es imposible realizar infinitos experimentos, por ello es necesario una nueva definición de probabilidad dada por el matemático Kolmogorov (Matemático ruso, 1903-1987) pasando de una probabilidad de un experimento determinista a una probabilidad de un experimento aleatorio. Definamos la probabilidad que verifica la **axiomática de Kolmogorov**,

Llamamos **probabilidad** a cualquier función P que a cada suceso A, asociado a un experimento aleatorio, cuyo espacio muestral es E, le asigna un número real P(A), que cumpla las siguientes propiedades (axiomas):

1) $P(A)\geq 0$, para cualquier suceso A.
2) P(E) = 1.
3) $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k)$, siendo los sucesos A_1, A_2, .., A_k sucesos incompatibles dos a dos.

Propiedades de la probabilidad:

1) La probabilidad de un suceso imposible es 0.
2) Dado un suceso A y su suceso contrario, se tiene $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3) Si un suceso A está contenido en otro suceso B entonces $P(A) \leq P(B)$
4) Para cualquier suceso A, $0 \leq P(A) \leq 1$
5) Dados dos sucesos A y B se tiene que $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$
6) Dados dos sucesos A y B se tiene que $P(A - B) = P(A) - P(A\cap B)$
7) $P(\phi) = 0$

Ejercicio 3: La probabilidad de aprobar la asignatura A es 0,6 y la de aprobar la asignatura B es 0,5. Además, la probabilidad de aprobar las dos es 0,25.

a) Halla la probabilidad de no aprobar ninguna de las dos asignaturas.
b) Calcula la probabilidad de aprobar A pero no B.

Ejercicio 4: Si P(A) = 0,7, P(B) = 0,35 y $P(A\cap B) = 0,15$, calcula las probabilidades de los sucesos $A\cup B$, $A\cap \overline{B}$ y $\overline{A} \cup \overline{B}$

8.4 CÁLCULO DE PROBABILIDADES.

En el apartado anterior hemos calculado probabilidades de ciertos sucesos a partir de la probabilidad de otros sucesos, en este apartado veremos como calcular la probabilidad de un suceso a partir de lo que sabemos del experimento, antes debemos definir algunos conceptos importantes, pero no olvidemos las propiedades de la probabilidad.

El espacio muestral es finito si el número de sucesos elementales es limitado y es equiprobable si todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad.
Si un suceso A del espacio E, finito y equiprobable, contiene "m" de los "n" resultados posibles del experimento, su **probabilidad** se puede calcular mediante la regla de Laplace

$$P(A) = \frac{n^o desucesoselementalesdequeconstaA}{n^o totaldesucesoselementales} = \frac{m}{n}$$

Ejercicio 5: De una baraja de póker de 52 cartas, 13 de cada palo (picas, corazones, diamantes, tréboles), se extraen dos cartas una a una sin devolverlas al mazo. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo palo?

Ejercicio 6: Un dado octaédrico tiene las caras 1, 2 y 3 de color verde, las caras 4, 5 y 6 de color rojo, y las caras 7 y 8 de color azul. Si se lanza el dado una vez, describe el espacio muestral y calcula la probabilidad de obtener número par o cara azul.

Ejercicio 7: En un dado trucado, la probabilidad de obtener 4 puntos en un lanzamiento es la misma que la de obtener 6 puntos, y esta es el doble que la de obtener cualquier otra puntuación. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par con este dado?

Ejercicio 8: Un juego consiste en lanzar dos dados de distinto color y obtener la diferencia de las puntuaciones de ambos dados. Si la diferencia es cero ni se gana ni se pierde, si la diferencia es un número par distinto de cero se gana y si la diferencia es un número impar pierde. Calcula la probabilidad de:

a) Ganar.
b) Perder.
c) Empatar.

¿Cómo puedes modificar las reglas del juego para que las probabilidades de ganar y perder sean iguales?

Ejercicio 9: Si elige al azar un número de 5 cifras distintas escrito con las cifras 2, 3, 5, 7 y 8.

a) Calcula la probabilidad de que dicho número sea mayor que 87000.
b) Calcula la probabilidad de que sea menor que 32000.
c) Calcula la probabilidad de que el número esté entre 30000 y 60000.

8.5 PROBABILIDAD CONDICIONADA. INDEPENDENCIA DE SUCESOS.

En un experimento, conocido su espacio muestral E, el cálculo de probabilidades se ve influenciado si sabemos que ha ocurrido un suceso B.

Ejemplo 1: Calcula la probabilidad de obtener suma impar y la probabilidad de suma menor que 7, si lanzamos un dado dos veces.
El número de resultados posibles es $VR_{6,2}$ = 36 (hacer una tabla de 7x7)
A = "Obtener suma impar" → por la regla de Laplace tenemos que
P(A) = $\frac{\text{n de resultados favorables a A(contamos en la tabla)}}{\text{n resultados posibles}} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
B = "Obtener menor que 7" → P(B) = $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

En cambio, si nos piden: Calcula la probabilidad de A sabiendo que ha ocurrido B.

Si miras la tabla solo hay 6 sumas impares de 15 sumas menores que 7, es decir,

$$P(A|B) = \frac{6}{15} = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

** En este caso la probabilidad de A es menor si ocurre B. Si A fuese el suceso "suma par", $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{9}{15} > \frac{1}{2}$

Si A y B son dos sucesos del espacio muestral E con P(B) > 0, se define la **probabilidad de A condicionada por B** como $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

1) Regla de la multiplicación para probabilidades condicionadas: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(B \mid A)$ con P(A) > 0 y P(B) > 0
2) Independencia de sucesos: Dos sucesos A y B, con P(A) > 0 y P(B) > 0, son **independientes** si sabiendo que ha ocurrido uno de ellos no se modifica la probabilidad del otro, es decir, $P(A \mid B) = P(A)$ y $P(B \mid A) = P(B)$.
3) Dos sucesos que no son independientes se dice que son **dependientes.**
4) Dos sucesos A y B sea independientes $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
5) Se dice que los sucesos A, B y C son **mutuamente independientes** si son independientes dos a dos y además $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

Ejercicio 10: De una baraja de 40 cartas se extraen al azar tres cartas, una a una sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad:
a) De que la primera carta sea de oros y las dos siguientes sean espadas.
b) De obtener al menos un oros.

Ejercicio 11: El 50% de los jóvenes de una ciudad dice practicar el deporte A, y el 40%, el deporte B. Se sabe que el 70% practica el deporte A o el B o ambos. Si se elige un joven al azar, se pide:

a) Probabilidad de que practique solo A.
b) ¿Son independientes los sucesos "Practicar A" y "Practicar B"?

Ejercicio 12: En un centro educativo el 40% de los alumnos practica voleibol, el 30% bádminton y el 20 % ambos.

a) Si un alumno, elegido al azar, juega al voleibol, ¿cuál es la probabilidad de que no juegue al bádminton?
b) ¿Son independientes los sucesos "jugar al voleibol" y "jugar al bádminton"?

Ejercicio 13: Se consideran los sucesos A y B tales que P(A) = 0,84, P(B) = 0,5 y $P(\overline{A}|\overline{B})$ = 0,12

a) ¿Son independientes A y B?
b) Calcula la probabilidad de que se ocurran A y $\overline{B}$.

Ejercicio 14: Calcula $P(\overline{A}|B)$ sabiendo que P(B) = 0,25 y $P(A \cap B)$ = 0,2.

Ejercicio 15: De dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral se sabe que:

$$P(A \cap B) = 0{,}2 \qquad P(A \cup B) = 0{,}4 \qquad P(A/B) = 0{,}8$$

a) Calcule P(B) y P(A).
b) ¿Son los sucesos A y B independientes? Razone la respuesta.
c) Calcule $P(A^c \cup B^c)$

Ejercicio 16: Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio dado. Se sabe que P(A) = 0,5. $P(A \cup B) = 0{,}75$, $P(A - B) = 0{,}3$.

a) Calcule $P(A \cap B)$
b) Calcule $P(A/B^c)$
c) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Son los sucesos A y B incompatibles?

Ejercicio 17: Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio dado tales que P(B) = 0,4. $P(A/B) = 0{,}25$ y $P(A - B) = 0{,}4$.

a) Calcule $P(A \cap B)$
b) Calcule P(A) y $P(A \cup B)$
c) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Son incompatibles?

8.6 REGLA DE LA PROBABILIDAD TOTAL. TEOREMA DE BAYES.

Se dice que los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forman una partición del espacio muestral E si son incompatibles dos a dos y además cubren el espacio muestral.
Es decir $A_i \cap A_j$ para todo $i \neq j$ y además $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$.
Por ejemplo: Al tirar un dado, sacar par y sacar impar. Al sacar una carta de una baraja de 40 cartas, sacar oros, sacar espadas, sacar copas, sacar bastos.

Teorema de la probabilidad total

$P(B) = P(A_1)\, P(B|A_1) + P(A_2)\, P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)\, P(B|A_n)$ siendo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición del espacio muestral.

Teorema de Bayes

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forman una participación del espacio muestral E, con las **probabilidades iniciales** (a priori) $P(A_j) > 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n$ y B un suceso cualquiera con $P(B) > 0$, entonces la **probabilidad final** (a posteriori) $P(A_j|B)$ se calcula:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B \mid A_j)}{P(B)} = \frac{P(A_j) \cdot P(B \mid A_j)}{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B \mid A_n)}$$

Siendo $P(B \mid A_j)$ las **verosimilitudes**.

¿Aplicaciones del Teorema de Bayes? Nos sirve para calcular las probabilidades finales conocida como influye un suceso B.

Ejercicio 18: El 75% de los clientes de una entidad financiera son de la zona norte y el resto de las demás zonas de la ciudad. El 4% de los clientes de la zona norte y el 8% de las otras son morosos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente sea moroso?
b) Si elegimos un cliente al azar y resulta ser moroso, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la zona norte?

Ejercicio 19: El 60% de los pedidos de una empresa son realizados por organismos públicos y el resto, por organismos privados. En los organismos públicos, el 10% de los pedidos son pagados al contado, mientras que en los organismos privados este porcentaje es del 25%.

a) De entre los pedidos de la empresa, ¿qué porcentaje se paga al contado?

b) De entre los pedidos que se pagan al contado, ¿qué porcentaje son de organismos privados?

Ejercicio 20: En una agencia de viajes los clientes viajan a España y Portugal (48%), a otros países europeos (35%) y al resto del mundo (17%). De ellos, respectivamente, el 20%, el 45% y el 60% contratan algún seguro de viaje.

a) ¿Cuál es el porcentaje de clientes de la agencia que no contratan seguro de viaje?
b) Si se elige un cliente que ha contratado un seguro de viaje, ¿cuál es la probabilidad de que viaje a España y Portugal?

Ejercicio 21: Una entidad bancaria concede tres tipos de créditos: para vivienda, para industria y personales. El 30% de los créditos que concede son para viviendas, el 50% para industria y el 20% son personales. Han resultado impagados el 5% de los créditos concedidos a vivienda, el 7% de los de industria y el 12% de los personales. Se pide:

a) Seleccionado un crédito al azar, calcula la probabilidad de que no resulte impagado.
b) Se sabe que un determinado crédito ha resultado impagado. Calcula la probabilidad de que sea un crédito de vivienda.

Ejercicio 22: El número de vuelos que llegan a un aeropuerto por la mañana es 120, por la tarde, 150, y por la noche, 30. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2%, por la tarde del 4% y por la noche del 6%.

a) Calcula la probabilidad de que se retrase un vuelo con destino a este aeropuerto.
b) Si un vuelo llegó con retraso a este aeropuerto, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un vuelo nocturno?

Ejercicio 23: Los gerentes de unos grandes almacenes han comprobado que el 40% de los clientes paga sus comprar con tarjeta de crédito y el 60% restante lo hace en efectivo. Ahora bien, si el importe de la compra es superior a 100 €, la probabilidad de pagar con tarjeta pasa a ser 0,6. Si además sabemos que en el 30% de las compras el importe es superior a 100 €, calcular:

a) Probabilidad de que un importe sea superior a 100 € y sea abonado con tarjeta.
b) Probabilidad de que un importe sea superior a 100 €, sabiendo que fue abonado en efectivo.