SOLUCIONES T9.4 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

1.- a) $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -5/9 & 16/9 \\ 7/9 & 1/9 \end{pmatrix}$

2.- No se puede resolver matricialmente.

3.- a) (-1, 5, 2) b) $(7/3- \lambda, 2/3, \lambda)$ c) (0, 0, 0) d) (m, m -4, 1)

4.- a) SCI, soluciones: $(2, (1 + \lambda)/2, \lambda)$ b) SCI, soluciones: $(3-2\lambda+3\mu, \lambda, \mu)$

c) SCD, solución (1, -3, 2) d) SI

e) SCD, solución trivial f) $(0, \lambda, 4\lambda, \lambda)$ $\lambda \in \Re$

5.- a) Calcula rg $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & t & 9 \end{pmatrix}$, por Gauss va bien, obteniendo rg $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & -3t & 0 \end{pmatrix}$, si queremos que sea SCI, necesitamos que rgA = rgA* y rgA = rgA*< 3 → -3t = 0 → t = 0

b) Puesto que $a_{34} = 0$ → rgA = rgA* para todo t, por tanto el sistema siempre es compatible.

6.- a) Para discutir el sistema necesitamos conocer rgA y rgA*, para ello estudiamos por determinantes el rg $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda+2 \end{pmatrix}$, no hay ningún menor de orden 1 que no dependa de λ, elegimos por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 2$,

para λ = 2 nos queda rg $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, si estudias el rango por Gauss, obtienes rgA = rgA* = 3 por tantoSCD

para $\lambda \neq 2$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} \neq 0$ por tanto rgA $\geq$ 2 y rgA* $\geq$ 2, nos queda ver si tiene rango 3 partiendo de dicho menor, solo tenemos dos determinantes de orden 3

para A y A* tenemos $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

para A* tenemos $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 2 \\ \lambda & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

Por tanto si λ = -1 tenemos que $|A_1|$ = 0 y $|A_2|$ = 0 → rgA = rgA* = 2 → SCI

si λ = 2 tenemos que rgA = rgA* = 3 → SCD

si $\lambda \in \Re - \{-1{,}2\}$ tenemos que $|A_1| \neq 0$ y $|A_2| \neq$ 0 → rgA = rgA* = 3 → SCD

En resumen si λ = -1 → rgA = rgA* = 2 → SCI

si $\lambda \neq$ -1 → rgA = rgA* = 3 → SCD

**Al principio parecía que 2 era un valor especial pero finalmente no lo es.

b) Recuerda que puedes utilizar lo calculado arriba, por ejemplo el determinante de A lo tienes en el apartado a, simplemente sustituyes por el valor dado, 1. Sabemos que es SCD por lo hecho anteriormente y puedes usar Cramer, solución x = 1, y = 1, z = 1

7.- a) $\left.\begin{array}{l} k \neq 1{,}0 \Rightarrow rgA = rgA^* = 3 \Rightarrow SCD \\ k = 0 \Rightarrow rgA = rgA^* = 2 \Rightarrow SCI \\ k = 1 \Rightarrow rgA = 2 \;\; rgA^* = 3 \Rightarrow SI \end{array}\right\}$ Me piden el valor de k para que sea incompatible, para k = 1 es sistema es incompatible.

b) Tienes dos formas

b1) Si el apartado a lo has hecho por Gauss, en el sistema resultante, sustituyes x por 2 y ya puedes calcular y, z y en consecuencia k (recuerda que k no puede ser 1) → k = 0, 2

b2) Si utilizas determinantes, por la regla de Cramer x = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ k+1 & k+1 & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & k+1 & k \end{vmatrix}}$, obtienes una ecuación, resuelves y obtienes k = 0, 2

8.- a) $\left.\begin{array}{l} m \neq 1{,}0 \Rightarrow rgA = 2 \;\; rgA^* = 3 \Rightarrow SI \\ m = 0 \Rightarrow rgA = rgA^* = 2 \Rightarrow SCI \\ m = 1 \Rightarrow rgA = \;\; rgA^* = 2 \Rightarrow SCI \end{array}\right\}$

b) Soluciones para m=1 (del apartado a sabes que es SCI) x = -2n y = 1 + n z = n con n $\in \Re$

Me pide que z = 2 → n = 2 → x = -4 y = 3 z = 2

9.- a) AX = mX → AX – mX = O → (A – mI) X = O por tanto es un sistema homogéneo y siempre tiene solución, estudiamos el rango y obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} m \neq 2,3 \Rightarrow rgA = rgA^* = 3 \Rightarrow SCD \\ m = 2 \Rightarrow rgA = rgA^* = 1 \Rightarrow SCI \\ m = 3 \Rightarrow rgA = rgA^* = 2 \Rightarrow SCI \end{array}\right\}$$

b) El sistema es CD para $m \neq 2,3$, la única solución es la trivial (sistema homogéneo) x= y= z= 0

c) m = 3 es SCI → soluciones x = 0 y = n z = n

si queremos que x + y + z = 3 → x = 0 y = 3/2 z = 3/2

10.- a) $\left.\begin{array}{l} m \neq 2 \Rightarrow rgA = rgA^* = 3 \Rightarrow SCD \\ m = 2 \Rightarrow rgA = rgA^* = 2 \Rightarrow SCI \end{array}\right\}$

b) para m = 2 es SCI → soluciones x = (5 – 3n)/2 y = (n – 1)/2 z = n n nº real

Si queremos que z = 17 → x = -23 y = 8 z = 17

11.- x es la cantidad de alimento x, y es la cantidad de alimento y, z es la cantidad de alimento z, para tener las cantidades de la vitamina A (11) tengo 1 de x 2 de y y 3 de z → x + 2y + 3z = 11, así obtenemos $\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 11 \\ 3x + 3y + 3z = 9 \\ 4x + 5y + 6z = 20 \end{array}\right\}$

Resolvemos y obtenemos un SCI → x = m – 5 y = 8 – 2m z = m m nº real

12.- x = precio del lápiz y = precio del rotulador z = precio de la carpeta

a) obtenemos $\left.\begin{array}{r} 3x + y + 2z = 15 \\ 2x + 4y + z = 20 \\ x + 7y = 25 \end{array}\right\}$ resulta un SCI por tanto no podemos determinar el precio de cada uno.

b) obtenemos $\left.\begin{array}{r} 3x + y + 2z = 15 \\ 2x + 4y + z = 20 \\ z = 10x \end{array}\right\}$ resulta un SCD → x = ½ y = 7/2 z = 5

13.- x = beneficios de la empresa A, y = beneficios de la empresa B, z = beneficios de la empresa C

a) obtenemos $\left.\begin{array}{l} y = x + z \\ x = \dfrac{y+z}{2} \end{array}\right\}$ que es un SCI por tanto no se puede determinar el precio

b) obtenemos $\left.\begin{array}{l} y = x + z \\ x = \dfrac{y+z}{2} \\ x + y + z = 210 \end{array}\right\}$ que es un SCD → x = 70 y = 105 z = 35

$n = 3 \Rightarrow \text{SI},\ n = 0 \Rightarrow \text{SCI, soluciones } \left(\dfrac{1+6\lambda}{3}, \dfrac{2}{3}, \lambda\right)\ \lambda \in \Re,\ n \neq 0{,}3 \Rightarrow \text{SCI}$

e) $n \neq 1 \Rightarrow \text{SCI, soluc } (-1-\lambda, n+1, \lambda)\ \ \lambda \in \Re, n = 1 \Rightarrow \text{SCI, soluc}: (n-\mu-\lambda, \lambda, \mu)\ \lambda, \mu \in \Re$