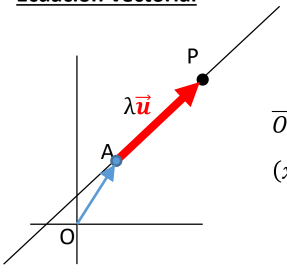
Apuntes/Resumen de geometría analítica

Una recta queda determinada si se conoce un **vector con la dirección de la recta** y **un punto de la recta**.
La ecuación de una recta es una expresión matemática que verifican **los puntos del plano (x,y) que pertenecen a ella**.

Recta: r $\begin{cases} \vec{u} = (u_1, u_2) \\ A = (a_1, a_2) \end{cases}$

Ecuación vectorial



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} \quad \text{con } \lambda \in R$$

$$(x, y) = (a_1, a_2) + \lambda(u_1, u_2)$$

Ecuaciones paramétricas

Si separamos x e y en dos ecuaciones obtenemos las paramétricas. Dando valores al parámetro podemos obtener cualquier punto de la recta.

$$r: \begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in R$$

Ecuación continua

Si despejamos el parámetro de ambas ecuaciones e igualamos obtenemos la ecuación continua.

$$\lambda = \frac{x-a_1}{u_1}$$

$$\lambda = \frac{y-a_2}{u_2}$$

$$\frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2}$$

Ecuación General

Simplificando la ecuación continua llegamos a la ecuación general de la recta.

$$Ax + By + C = 0$$

El vector **(A,B)** es perpendicular a la recta.
El vector **(-B,A)** es un vector director de la recta.
No hay ningún punto visible. Hay que darle un valor a x (o y) para obtener el valor de la otra letra.

Ecuación explícita

Si despejamos y de la ecuación general, obtenemos la ecuación explícita de la recta.

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \longleftrightarrow y = mx + n$$

$$pendiente = m = \frac{u_2}{u_1} = -\frac{A}{B} = tg\ \alpha$$

α es el ángulo que forma la recta con la horizontal (eje x)

Ordenada en el origen = n = Altura a la que corta el eje y
La recta pasa por el punto (0,n)

Punto pendiente

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Si A(2,3) y $\vec{u} = (4,5)$

$$(x, y) = (2,3) + \lambda(4,5) \quad \text{con } \lambda \in R$$

$$r: \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in R$$

$$\lambda = \frac{x-2}{4} \qquad \lambda = \frac{y-3}{5}$$

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{5}$$

$$5x - 4y + 2 = 0$$

$$y = \frac{5}{4}x - 2$$

$$y - 3 = \frac{5}{4}(x - 2)$$

Obtener un punto y un vector director de cada ecuación de la recta.

$$(x, y) = (7,1) + \lambda(5,2)$$

$$\vec{u} = (5,2)$$

$$P = (7,1)$$

Si $\vec{u} = (5,2)$ es un vector director, también lo es cualquier vector paralelo a él como $(-5,-2)$ o $(10, 4)$

$$r: \begin{cases} x = 9 + 5\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in R$$

$$\vec{u} = (5,-2)$$

$$P = (9,3)$$

$$\frac{x-7}{-5} = \frac{y+1}{2}$$

$$\vec{u} = (-5,2)$$

$$P = (7,-1)$$

$$2x - 5y - 9 = 0$$

$$\vec{u} = (-B, A) = (5, 2)$$

$$Si\ x = 0$$

$$2 \cdot 0 - 5y - 9 = 0$$

$$y = -\frac{9}{5}$$

$$P = (0, -\frac{9}{5})$$

$$y = 3x - 2$$

$$m = 3 = \frac{3}{1}$$

$$\vec{u} = (1,3)$$

$$P = (0,-2)$$

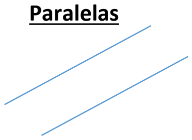
$$y + 10 = -\frac{5}{4}(x - 2)$$

$$\vec{u} = (-4,5)$$

$$P = (2,-10)$$

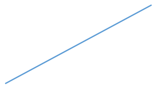
Posiciones relativas de dos rectas

Paralelas



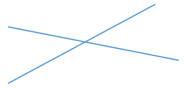
Vectores paralelos
No tienen puntos en común

Coincidentes



Vectores paralelos
Todos los puntos en común

Secantes



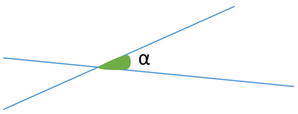
Vectores no paralelos
Un único punto en común

Ángulo entre dos rectas

Para calcular el ángulo entre dos rectas, calculamos el ángulo que forman sus vectores directores. Tomamos siempre el en el primer cuadrante ya que el ángulo entre dos rectas se mueve entre 0º y 90º (siempre el ángulo agudo). Si son paralelas o coincidentes su ángulo es 0º. También podemos usar la pendiente.

$$\cos\alpha = \frac{|A\cdot A' + B\cdot B'|}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{m-m'}{1+m\cdot m'}\right|$$



Si tenemos dos rectas y conocemos su **vector director** y **un punto** de cada una:

$r:\begin{cases}\vec{u}\\ A\end{cases}$ $\quad s:\begin{cases}\vec{v}\\ B\end{cases}$

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos, las rectas son secantes.
Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos calculamos $\overrightarrow{AB}$. $Si\ \vec{u}\ //\ \vec{v}\ //\ \overrightarrow{AB}$ entonces son coincidentes.
$Si\ \vec{u}\ //\ \vec{v} \not\parallel \overrightarrow{AB}$ entonces son paralelas.

Si tenemos dos rectas y conocemos su **ecuación explícita**:

$r:\ y = mx + n$

$s:\ y = m'x + n'$

Si m ≠ m' son secantes. (La pendiente no es igual, así que se van a cortar)
Si m=m' pero n ≠ n' son paralelas. (Misma pendiente pero diferente altura)
Si m= m' y n=n' son coincidentes. (Misma ecuación)

Si tenemos dos rectas y conocemos su **ecuación general**:

$r: Ax + By + C = 0$

$s: A'x + B'y + C' = 0$

$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ Secantes (sus vectores (-B,A) no son paralelos)

$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ Paralelas

$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$ Coincidentes (las dos ecuaciones son proporcionales, es decir, son la misma ecuación)

Para calcular el punto de corte entre dos rectas secantes tenemos que resolver el sistema formado por esas dos rectas (con sus ecuaciones generales o explícitas).

Distancias

Para calcular la **distancia entre dos puntos** A y B, d(A,B), calculamos el módulo del vector formado por esos dos puntos.

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}|$$

Ej: Si A=(2,5) y B(5,1) la distancia entre A y B es:

$$\overrightarrow{AB} = (3,-4)$$

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9+16} = 5$$

Para calcular la **distancia entre un punto y una recta** podemos aplicar la siguiente fórmula:

$r: Ax + By + C = 0$

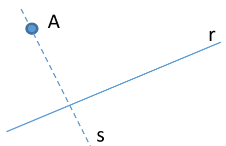
$P(x_0, y_0)$

$$d(P,r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

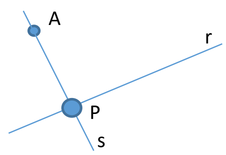
Para calcular la **distancia entre dos rectas**:
1º Elegimos un punto de una recta.
2º Calculamos la distancia de ese punto a la otra recta.

Solo se puede calcular cuando son paralelas. Si las rectas son coincidentes o secantes, la distancia es 0.

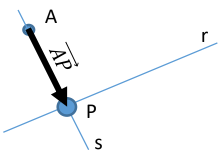
Para calcular la **distancia entre un punto P y una recta r sin usar la fórmula**:



1ºPaso: Calculamos la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por el punto P



2ºPaso: Calculamos el punto de corte entre ambas rectas



3ºPaso: Calculamos la distancia entre esos dos puntos.

Ejemplo: Distancia entre el punto A(-2,3) y la recta r: y=3x-1

Para calcular la recta que pasa por A y es perpendicular a r, cogemos el vector director de r -> (1,3) y obtenemos uno perpendicular (-3,1)

La recta s tendría de ecuación:

$$y - 3 = -\frac{1}{3}(x+2)$$

Para calcular el punto de corte (P) de ambas rectas, r y s, resolvemos el sistema de ecuaciones formado por ellas:

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y - 3 = -\frac{1}{3}(x+2)\end{cases}$$

$$\begin{matrix} x = 1 \\ y = 2\end{matrix} \qquad P(1,2)$$

Finalmente calculamos la distancia entre los dos puntos con el módulo del vector.

$$d(A,r) = d(A,P) = |\overrightarrow{AP}|$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (3,-1)$$

$$d(A,P) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$$

Puedes comprobar que es el mismo resultado que obtendrías al aplicar la fórmula.